

Kanten- und Totalfärbungen von Graphen

Andrea Hackmann
aus Cuxhaven

Vom Fachbereich für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Braunschweig

genehmigte Dissertation

zur Erlangung des Grades einer
Doktorin der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

1. Referent: Prof. Dr. A. Kemnitz
2. Referent: Prof. Dr. H. Harborth
Eingereicht am: 2. Juli 2002
Prüfung am: 3. September 2002

Ich danke Herrn Professor Kemnitz für seine freundliche Betreuung und wertvollen Anregungen, die meine Freude an der Mathematik und an graphentheoretischen Problemlösungen stets aufs Neue geweckt haben.

Danken möchte ich außerdem meinen Eltern, meiner Schwester, meinem Freund Carsten sowie allen anderen lieben Menschen, die mir in fachlicher, computertechnischer, korrekturlesender, zuhörender oder anderer Weise in den letzten Jahren zur Seite standen.

Nicht zuletzt danke ich der Graduiertenförderung der TU Braunschweig, der Studienstiftung des deutschen Volkes und meinem Vertrauensdozenten Herrn Professor Löwen für die mir gewährte Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Färbungen	9
2.1	Kantenfärbung	11
2.1.1	Eigenschaften des chromatischen Index	11
2.1.2	Klassifizierung von Graphen	13
2.2	Totalfärbung	20
2.2.1	Eigenschaften der totalchromatischen Zahl	21
2.2.2	Die totalchromatische Vermutung	23
2.2.3	Exakte Werte für die totalchromatische Zahl	25
3	Planare kritische Graphen der Kantenfärbung	41
3.1	Eigenschaften kritischer Graphen	41
3.2	Gradfolgen planarer kritischer Graphen	44
3.3	Konstruktion planarer kritischer Graphen	49
4	Kreisfärbungen	63
4.1	Kreiskantenfärbung	63
4.1.1	Eigenschaften des kreischromatischen Index	65
4.1.2	Exakte Werte für den kreischromatischen Index	67
4.1.3	$\chi'_c(G)$ von Klasse-2-Graphen kleiner Ordnung	70
4.2	Kreistotalfärbung	75
4.2.1	Eigenschaften der kreistotalchromatischen Zahl	76
4.2.2	Exakte Werte für die kreistotalchromatische Zahl	77
4.2.3	$\chi''_c(G)$ von Typ-2-Graphen kleiner Ordnung	84

INHALTSVERZEICHNIS

5	Listenfärbungen	87
5.1	Listenkantenfärbung	88
5.1.1	Eigenschaften des listenchromatischen Index	89
5.1.2	Exakte Werte für den listenchromatischen Index	90
5.1.3	(a, b) -Listenkantenfärbung	95
5.1.4	(a, b, r) -Listenkantenfärbung	102
5.2	Listentotalfärbung	107
5.2.1	Eigenschaften der listentotalchromatischen Zahl	108
5.2.2	Exakte Werte für die listentotalchromatische Zahl	109
6	Zusammenfassung und Ausblick	111
	Literaturverzeichnis	118
	Index	126

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Fußballweltmeisterschaft 2002 in Japan und Südkorea treten die Mannschaften Deutschlands, Kameruns, Irlands und Saudi-Arabiens in einer Gruppe paarweise gegeneinander an. Dabei sollen die Spieltage so gewählt werden, dass keine Mannschaft zwei Wettkämpfe am gleichen Tag bestreiten muss. Wieviele Tage braucht man mindestens, um alle Spiele durchzuführen?

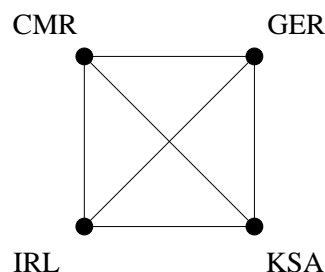


Abbildung 1.1: Vollständiger Graph für ein Turnier mit vier Mannschaften.

Dies ist ein typisches Beispiel für eine Fragestellung, die sich mit Hilfe von Kantenfärbungen lösen lässt. Stellt man wie in Abbildung 1.1 die antretenden Mannschaften durch Knoten dar, von denen je zwei genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn die entsprechenden Mannschaften gegeneinander spielen sollen, so erhält man einen Graph, dessen Kanten gerade den stattfindenden Wettkämpfen entsprechen. Im Beispiel tritt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft an, so dass ein vollständiger Graph entsteht. Ordnet man nun den Kanten des Graphen eine minimale Anzahl von Farben so zu, dass benachbarte Kanten unterschiedliche Farben erhalten, so entspricht jede Farbe einem Spieltag und die Anzahl benötigter Farben liefert die Antwort auf obige Frage.

Verschiedene Arten der Kantenfärbung sind ein Thema dieser Arbeit. In Abschnitt 2.1.1 werden Eigenschaften des chromatischen Index $\chi'(G)$ — der kleinstmöglichen Farbenanzahl für die zulässige Kantenfärbung eines Graphen G — vorgestellt; der wichtigste Satz hierbei ist der Satz 2.3 von Vizing, der besagt, dass jeder Graph G eine $(\Delta(G) + 1)$ -Kantenfärbung besitzt. Dabei bezeichnet $\Delta(G)$ den Maximalgrad des Graphen, also die maximale Anzahl von Kanten, die zu einem Knoten von G inzidieren. Da der chromatische Index eines Graphen G offensichtlich immer mindestens gleich seinem Maximalgrad ist, ergibt sich mit dem Satz von Vizing eine Einteilung aller Graphen anhand ihres chromatischen Index in nur zwei Klassen: die Graphen der Klasse 1, die mit Δ Farben kantenfärbbar sind, und jene der Klasse 2, für die $\Delta + 1$ Farben benötigt werden. Ergebnisse zur Klassifizierung von Graphen — also zur Bestimmung des chromatischen Index — sind in Abschnitt 2.1.2 angegeben. Im Beispiel zur WM 2002 ist nach Satz 2.5 eine 3-Kantenfärbung möglich; ein entsprechender optimaler Spielplan ergibt sich aus Abbildung 1.2.

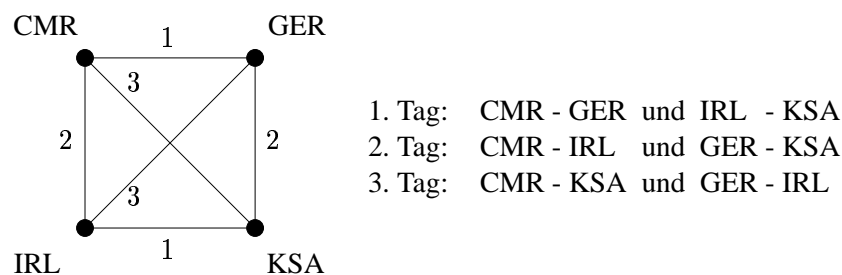


Abbildung 1.2: Turnier in 3 Tagen.

Wie in Abschnitt 2.1.2 dargestellt wird, lässt sich zeigen, dass es verhältnismäßig wenige Graphen der Klasse 2 gibt. Für die Charakterisierung dieser Klasse-2-Graphen ist die Definition so genannter kritischer Graphen der Kantenfärbung hilfreich: Ein Klasse-2-Graph heißt kritisch, wenn sich sein chromatischer Index durch Entfernen einer beliebigen Kante verringert. Da man zeigen kann, dass jeder Klasse-2-Graph einen kritischen Graph mit gleichem Maximalgrad als Teilgraph enthält (Satz 3.1), ist es häufig sinnvoll, Klasse-2-Graphen anhand ihrer kritischen Teilgraphen zu untersuchen. Eine besondere Rolle unter den kritischen Graphen spielen planare kritische Graphen: Nachdem sich die so genannte Critical Graph Conjecture, die besagt, dass jeder kritische Graph ungerader Ordnung ist, als falsch erwiesen hatte — der kleinste heute bekannte kritische Graph gerader Ordnung hat 18 Knoten —, wurde sie zur Weak Critical Graph Conjecture (Vermutung 3.1) abgeschwächt. Nach dieser Vermutung gibt es keine planaren kritischen Graphen gerader Ordnung, und tatsächlich sind alle bisher bekannten kritischen Graphen gerader Ordnung nicht planar. In Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit wird die Struktur kleiner planarer kritischer Graphen untersucht; die Ergebnisse sind zudem die Grundlage des in Abschnitt 3.3 beschriebenen Algorithmus, mit dessen Hilfe alle planaren kritischen Graphen mit bis zu 12 Knoten konstruiert und dargestellt

wurden (Abbildungen 3.9 bis 3.15).

Will man im obigen Beispiel des Fußballwettkampfes zusätzlich jeder Mannschaft einen Trainingstag in einem gemeinsamen Trainingslager einräumen, jedoch aus Sicherheitsgründen voraussetzen, dass keine zwei Mannschaften, die gegeneinander antreten, am gleichen Tag trainieren, so ergibt sich eine neue Fragestellung, die man mit Methoden der so genannten Totalfärbung lösen kann. Hier werden im Graph aus Abbildung 1.1 nicht nur die Kanten, sondern auch die Knoten gefärbt, und es sollen sowohl benachbarte Kanten als auch benachbarte Knoten und zueinander inzidente Knoten und Kanten unterschiedliche Farben erhalten. Die Farbe eines Knotens entspricht so gerade dem Trainingstag der zugehörigen Mannschaft. Minimiert man die Anzahl verwendeter Farben, so erhält man die totalchromatische Zahl $\chi''(G)$ des Graphen G und damit die Antwort auf diese veränderte Fragestellung. Totalfärbungen und Variationen der Totalfärbung sind das zweite Thema dieser Arbeit. Im Beispiel zur Fußball-Weltmeisterschaft braucht man nach Satz 2.29 mindestens 5 Farben für eine Totalfärbung; Abbildung 1.3 zeigt eine mögliche 5-Totalfärbung des Graphen und den daraus resultierenden Spiel- und Trainingsplan.

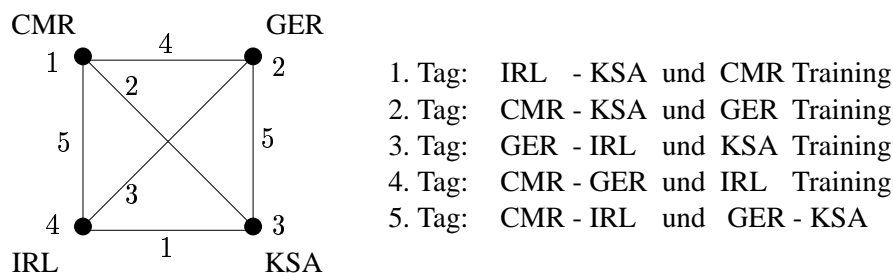


Abbildung 1.3: Turnier mit Trainingstagen in 5 Tagen.

Die Totalfärbung von Graphen wird in Abschnitt 2.2 behandelt. Im Gegensatz zur Kantenfärbung ist kein dem Satz von Vizing äquivalentes Ergebnis allgemein bewiesen; es wird jedoch vermutet, dass auch die totalchromatische Zahl in Abhängigkeit vom Maximalgrad Δ eines Graphen immer nur einen von zwei Werten annimmt, nämlich $\Delta + 1$ oder $\Delta + 2$. Ergebnisse zu dieser so genannten totalchromatischen Vermutung (Vermutung 2.3) sind in Abschnitt 2.2.2 zusammengestellt. Abschnitt 2.2.3 schließlich enthält eine Übersicht über Graphen und Graphenklassen, für die die totalchromatische Zahl bereits bekannt ist. Mit Satz 2.44 wird in dieser Arbeit die totalchromatische Zahl aller zirkulanten Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 3$ bestimmt.

Nicht für alle Anwendungsprobleme, die man mit den bisher beschriebenen Methoden der Graphenfärbung behandeln kann, ergibt sich jedoch durch geeignete Färbung eine optimale Lösung. Die in Kapitel 4 betrachteten Kreisfärbungen von Graphen bilden eine Verallgemeinerung der klassischen Färbung, die in manchen Fällen ein günstigeres Ergebnis liefert. Dazu sei die folgende Problemstellung ge-

geben: Für die in Abbildung 1.4 dargestellte Straßenkreuzung soll eine Ampelschaltung entwickelt werden, deren Gesamtdauer — also die Dauer eines kürzesten Zeitintervalls, während dessen für jede Fahrtrichtung mindestens einmal grünes Licht gegeben wird — minimal ist. Dabei dürfen Verkehrsteilnehmende aus sich überkreuzenden Fahrtrichtungen selbstverständlich nicht zur gleichen Zeit grünes Licht erhalten, und jede Grünphase hat die Einheitsdauer von einer Minute.

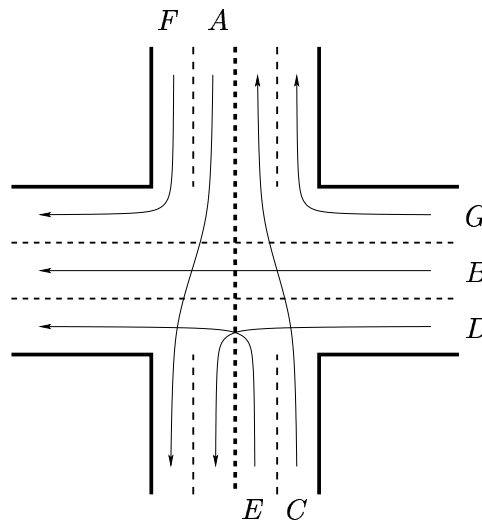


Abbildung 1.4: Straßenkreuzung mit 7 Richtungsmöglichkeiten.

Intuitiv wird man dieses Problem wieder mit Färbungen lösen wollen. Versteht man die sieben Fahrtrichtungen A, \dots, G als Knoten eines Graphen, von denen je zwei genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn die dazugehörigen Richtungen sich überkreuzen, so gibt eine Färbung der Knoten des Graphen eine mögliche Verteilung der Grünphasen an. In Abbildung 1.5 ist eine bestmögliche Knotenfärbung des im Beispiel entstehenden Graphen $C_5 \cup N_2$ angegeben, die zu einem Gesamtzeitintervall von 3 Minuten führt.

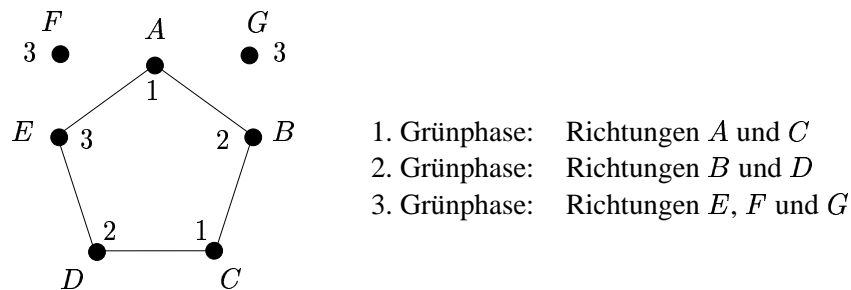


Abbildung 1.5: Gesamtintervall von 3 Minuten.

Die mit Hilfe gewöhnlicher Färbungen erhaltene Lösung des Problems ist jedoch nicht optimal, da sich auch eine Ampelschaltung mit einem Gesamtintervall von nur 2,5 Minuten konstruieren lässt, wenn man die Methoden der Kreisfärbung anwendet. Hierzu ordnet man jedem Knoten nicht eine einzelne Farbe, sondern ein offenes Kreisintervall der Länge 1 eines Kreises der Länge r so zu, dass die Intervalle benachbarter Knoten sich nicht überschneiden. Das einem Knoten zugeordnete Intervall entspricht so gerade einer Grünphase der dazugehörigen Fahrtrichtung. In Abbildung 1.6 ist eine Darstellung der einzelnen Grünphasen auf einem Gesamtkreisintervall der Länge $r = 2,5$ angegeben; die Richtungen F und G sind dabei nicht berücksichtigt, da sie jeweils keine anderen Richtungen kreuzen und ihnen daher beliebige Grünphasen zugeordnet werden können.

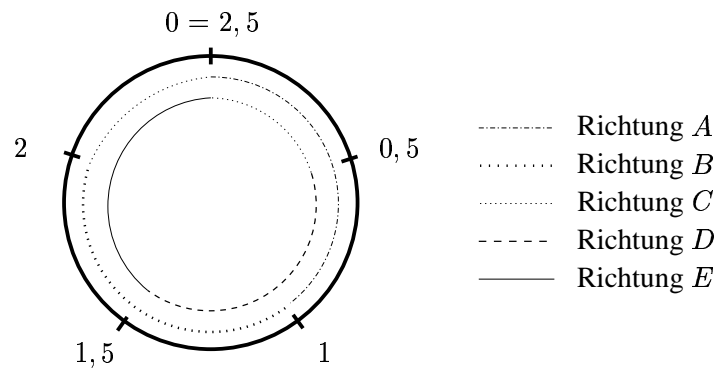


Abbildung 1.6: Gesamtintervall von 2,5 Minuten.

In der Literatur findet man Kreisfärbungen bisher meist als Kreisfärbung der Knoten von Graphen. In dieser Arbeit wird das Konzept der Kreisfärbung auf Kanten- und Totalfärbung übertragen. Ist ein Graph kreiskanten- beziehungsweise kreistotalfärbbar, so dass die den Kanten beziehungsweise den Knoten und Kanten zugeordneten Kreiseinheitsintervalle insgesamt einen Kreis der Länge r bilden, so spricht man von einem r -kreiskantenfärbbaren (r -kreistotalfärbbaren) Graph. In den Abschnitten 4.1.1 und 4.2.1 werden Eigenschaften des kreischromatischen Index χ'_c beziehungsweise der kreistotalchromatischen Zahl $\chi''_c(G)$ eines Graphen G hergeleitet. Die Zahlen $\chi'_c(G)$ beziehungsweise $\chi''_c(G)$ geben dabei jeweils das Infimum aller Zahlen r an, für die ein Graph r -kreiskantenfärbbar beziehungsweise r -kreistotalfärbbar ist. Anschließend wird in Abschnitt 4.1.2 der kreischromatische Index von Kreisen, vollständigen Graphen sowie des Petersen-Graphen bestimmt (Sätze 4.4 bis 4.6), während in Abschnitt 4.2.2 die kreistotalchromatische Zahl von Kreisen, vollständigen Graphen, bestimmten vollständig r -partiten Graphen sowie 3-regulären zirkulanten Graphen ermittelt wird (Sätze 4.11 bis 4.14). Schließlich geben die Abschnitte 4.1.3 beziehungsweise 4.2.3 eine vollständige Darstellung aller Klasse-2-Graphen und aller Typ-2-Graphen G mit bis zu 7 Knoten und den dazugehörigen Werten $\chi'_c(G)$ beziehungsweise $\chi''_c(G)$ an, die mit einem Computerprogramm berechnet wurden. In Abschnitt 4.1.3 wird darüber hinaus eine obere

Schranke für den kreischromatischen Index bestimmter kritischer Graphen ermittelt (Satz 4.7).

Ein aktuelles Forschungsgebiet in der Theorie der Färbung von Graphen sind so genannte Färbungen mit lokalen Bedingungen. Dabei werden Färbungen gesucht, bei denen die Knoten zusätzliche Bedingungen erfüllen müssen. Einige dieser speziellen Färbungen werden in dieser Arbeit für Kanten- oder Totalfärbungen betrachtet. Zum Beispiel ergibt sich ein neues Färbungsproblem, wenn zu jedem zu färbenden Element eine Liste mit „erlaubten“ Farben vorgegeben ist, aus der eine Farbe ausgewählt werden soll. Diese so genannten Listenfärbungen spielen in der Telekommunikation eine wichtige Rolle. Wie in Abbildung 1.7 sei zum Beispiel eine Anzahl von Sendern gegeben, für die Sendefrequenzen bestimmt werden sollen. Dabei ergeben sich zwischen zwei Sendern Interferenzen, wenn sie auf gleichen Frequenzen senden und nur einen geringen Abstand voneinander haben. Zusätzlich ist jedem Sender je nach seinen besonderen technischen Eigenschaften eine Liste von Frequenzen zugeordnet, auf denen er senden kann. Wie lang muss die Frequenzliste pro Sender mindestens sein, damit sichergestellt ist, dass man für jeden Sender eine Frequenz aus seiner Liste wählen kann, ohne dass es Interferenzen gibt? In Abbildung 1.7 ist der Radius, innerhalb dessen es zu Störungen kommt, um jeden der Sender A, \dots, F durch einen Kreis gekennzeichnet.

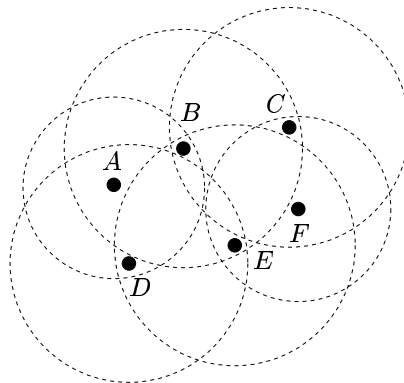


Abbildung 1.7: Anordnung von 6 Sendern mit Interferenzradien.

Besitzt jeder Sender die gleiche Liste möglicher Frequenzen, so ergibt sich die eingangs beschriebene Fragestellung zur Färbung von Graphen — übertragen auf Knoten- statt Kantenfärbung. Die Sender entsprechen hier den Knoten eines Graphen, und zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Sender sich bei Verwendung der gleichen Frequenzen stören. Wählt man verschiedene Farben für adjazente Knoten, so ist das Problem gelöst; nach bekannten Sätzen zur Knotenfärbung reichen für den sich aus Abbildung 1.7 ergebenden Graph, der in Abbildung 1.8 dargestellt ist, zwei Farben für eine Knotenfärbung aus. Die veränderte Aufgabenstellung besagt jedoch, dass jedem Knoten eine Liste von mindestens k Farben, den möglichen Frequenzen, zugeordnet

sein soll, so dass die Knoten des Graphen aus den gegebenen Listen gefärbt werden können — unabhängig davon, welche Farben in den Listen vorkommen. Wie zu Beginn von Kapitel 5 dargestellt, gibt es tatsächlich Graphen, die mit einer Anzahl k von Farben knotenfärbbar, jedoch nicht aus beliebigen k -elementigen Listen listenknotenfärbbar sind. Das angegebene Beispiel entspricht einem solchen Graph: Der Graph aus Abbildung 1.8 ist nicht aus den zugeordneten 2-elementigen Listen knotenfärbbar.

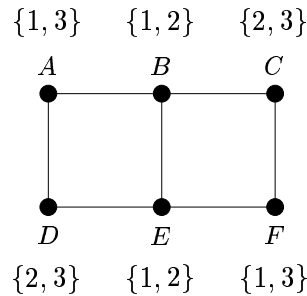


Abbildung 1.8: Der dem Beispiel aus Abbildung 1.7 entsprechende Graph.

Überträgt man das Konzept dieser so genannten Listenfärbung auf Kantenfärbungen, so wird die kleinste Anzahl k von Farben, die jede Kante eines Graphen G in der ihr zugeordneten Liste mindestens enthalten muss, damit der Graph aus den Listen kantengefärbt werden kann, als listenchromatischer Index $\text{ch}'(G)$ bezeichnet. Im Unterschied zur Knotenfärbung besagt die so genannte listenkantenchromatische Vermutung (Vermutung 5.1), dass der listenchromatische Index immer gleich dem chromatischen Index ist. In Abschnitt 5.1.2 werden Graphenklassen vorgestellt, für die die listenkantenchromatische Vermutung bereits bewiesen wurde. Für die Klasse der outerplanaren Graphen wird ein existierender eigener Beweis der listenkantenchromatischen Vermutung erheblich verkürzt und vereinfacht (Satz 5.12). In Abschnitt 5.2 werden die entsprechend definierte Listentotalfärbung von Graphen und Eigenschaften der dazugehörigen listentotalchromatischen Zahl $\text{ch}''(G)$ eines Graphen G behandelt (Abschnitt 5.2.1); auch hier wird vermutet, dass stets $\text{ch}''(G) = \chi''(G)$ gilt. Die listentotalchromatische Zahl ist bisher jedoch nur für sehr wenige Klassen von Graphen bekannt, von denen die wichtigsten in Abschnitt 5.2.2 angegeben sind.

Schließlich werden die Konzepte zweier Verallgemeinerungen der Listenfärbung, die in der Literatur bisher nur für Listenknotenfärbung untersucht worden sind, auf Kantenfärbung übertragen. Zum einen ist dies die so genannte (a, b) -Listenkantenfärbung von Graphen, bei der jeder Kante eines Graphen G aus gegebener Liste L der Länge a nicht nur eine Farbe, sondern eine b -elementige Teilmenge von L so zugeordnet werden soll, dass die für benachbarte Kanten gewählten Teilmengen leeren Durchschnitt haben. In Abschnitt 5.1.3 finden sich eine Übertragung der Definitionen und einige Eigenschaften der so genannten Choice Edge Ratio $\text{chr}'(G)$ — dem Infimum aller Zahlen a/b , so dass ein Graph G eine (a, b) -

Listenkantenfärbung besitzt. Für Kreise und Bäume wird die Choice Edge Ratio analog zu entsprechenden Ergebnissen für (a, b) -Listenknotenfärbung bestimmt (Sätze 5.16 und 5.19). Vermutung 5.3 besagt, dass alle (a, b) -listenkantenfärbbaren Graphen für jedes $m \in \mathbb{N}$ auch (am, bm) -listenkantenfärbbar sind; diese Vermutung wird für bestimmte Graphenklassen sowie einige Werte für a und b untersucht. So wird etwa die $(4m, m)$ -Listenkantenfärbbarkeit überfüllter kritischer Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 3$ bewiesen (Satz 5.21).

Außerdem wird eine Spezialform der (a, b) -Listenkantenfärbung untersucht, bei der für die Zuordnung der a -elementigen Listen zu den Kanten eines Graphen G zusätzlich verlangt wird, dass sich die Listen benachbarter Kanten um höchstens r Elemente überschneiden dürfen. Zu dieser so genannten (a, b, r) -Listenkantenfärbung (für $r = a$ ergibt sich die bereits beschriebene (a, b) -Listenkantenfärbung), die ebenfalls nur für Knotenfärbungen definiert war und für die es auch dort bisher nur wenige allgemeine Resultate gibt, werden in Abschnitt 5.1.4 Definitionen und Ergebnisse angegeben. Unter anderem wird gezeigt, dass für Bäume für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $k \leq \Delta m/2 - m + 1$ eine $(\Delta m - k, m, \Delta m - 2(k + m - 1))$ -Listenkantenfärbung existiert (Satz 5.25).

Kapitel 2

Färbungen

Die gesamte Theorie der Graphenfärbung kann auf die so genannte Vierfarbenvermutung zurückgeführt werden, die besagt, dass sich jede Landkarte mit nur 4 Farben so einfärben lässt, dass benachbarte Länder, also Länder mit gemeinsamer Grenzlinie, unterschiedliche Farben erhalten. Diese Vermutung wurde erstmalig im Jahr 1852 von Francis Guthrie (einem Studenten von de Morgan) aufgestellt.

Nach mehr als 25 Jahren, in denen die Vermutung in Vergessenheit geriet, und nach einem Wiederaufleben des Interesses an diesem Problem durch einen Vortrag von Arthur Cayley vor der London Mathematical Society erschien 1879 von Kempe [76] erstmals ein vermeintlicher Beweis der Vermutung, der mehr als zehn Jahre lang Bestand hatte. Erst im Jahr 1890 entdeckte Heawood [62] eine Lücke in Kempes Argumentation, konnte die Methoden jedoch benutzen, um die schwächere Aussage zu beweisen, dass die Flächen jeder Landkarte mit 5 Farben färbbar sind.

Bewiesen wurde die Vierfarbenvermutung schließlich im Jahr 1977 von Appel, Haken und Koch [4, 5] mit Hilfe von Computern und einem sehr aufwendigen Beweis. Ein kürzerer, jedoch auf den gleichen Ideen beruhender und ebenfalls nur mit Hilfe von Computerberechnungen durchzuführender Beweis des heutigen Vierfarbensatzes wurde 1997 von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas [89] veröffentlicht.

Aus dem Problem der Flächenfärbung ebener Graphen lässt sich eine analoge Fragestellung zur Färbung der Knoten eines planaren Graphen ableiten, wenn man den so genannten *Dualgraph* des zu betrachtenden Graphen untersucht, der folgendermaßen gebildet wird:

Jeder Fläche des ursprünglichen Graphen entspricht genau ein Knoten im Dualgraph, und zwei dieser Knoten sind genau dann benachbart, wenn die dazugehörigen Flächen durch eine gemeinsame Kante begrenzt werden.

Eine Flächenfärbung eines ebenen Graphen G entspricht somit einer Färbung der Knoten des Dualgraphen von G .

Definition 2.1 Es sei G ein Graph mit Knotenmenge V . Eine Abbildung $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ heißt k -Knotenfärbung von G , wenn für je zwei benachbarte Knoten $v_i, v_j \in V$ gilt $c(v_i) \neq c(v_j)$. Die kleinste Zahl k , für die G eine k -Knotenfärbung besitzt, wird mit $\chi(G)$ bezeichnet und heißt chromatische Zahl von G . Ist G knotengefärbt, so wird eine Menge von Knoten gleicher Farbe eine Farbklasse der Knotenfärbung von G genannt.

Übertragen auf Knotenfärbungen besagt der Vierfarbensatz, dass man die Knoten eines planaren Graphen immer mit 4 Farben färben kann.

Satz 2.1 (Vierfarbensatz) Für jeden planaren Graph G gilt $\chi(G) \leq 4$.

Bei der Betrachtung der Färbungseigenschaften von Graphen kann man sich sowohl bei der Flächen- als auch bei der Knotenfärbung auf die Untersuchung zusammenhängender Graphen beschränken, da die Anzahl benötigter Farben bei einem unzusammenhängenden Graph gleich der maximalen Zahl benötigter Farben in jeder seiner Komponenten ist.

Bei der Knotenfärbung kann man sogar noch weitere Einschränkungen vornehmen: Ist G ein Graph mit Artikulation, gibt es also einen Knoten $v \in V(G)$, so dass der Graph $G - v$ unzusammenhängend ist, so ist $\chi(G)$ gleich dem Maximum der chromatischen Zahlen aller Blöcke, also aller maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von G . Somit kann man sich bei der Untersuchung von Graphen hinsichtlich ihrer chromatischen Zahl auf 2-zusammenhängende Graphen beschränken.

Mittels Induktion lässt sich leicht zeigen, dass jeder Graph G mit Maximalgrad Δ eine $(\Delta + 1)$ -Knotenfärbung besitzt. Dieses Ergebnis wird durch den folgenden Satz von Brooks [9] verschärft:

Satz 2.2 (Satz von Brooks) Ist G ein Kreis ungerader Ordnung oder ein vollständiger Graph, so gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1$; in allen anderen Fällen gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Neben den ungeraden Kreisen und den vollständigen Graphen ist die chromatische Zahl auch für weitere Graphenklassen bekannt; so gilt zum Beispiel $\chi(G) = 2$ genau dann, wenn G bipartit ist. Somit ist die durch Satz 2.2 gegebene obere Schranke für die chromatische Zahl unter Umständen sehr ungenau: Der vollständig bipartite Graph $K_{n,n}$, der in Abschnitt 2.1.2 definiert wird (siehe Seite 15), hat chromatische Zahl $\chi(K_{n,n}) = 2$, obwohl der Satz von Brooks nur $\chi(K_{n,n}) \leq n$ liefert. Hier wird ein wichtiger Unterschied der Knotenfärbung zur Kantenfärbung und zur Totalfärbung deutlich: Bezüglich Kantenfärbung gibt es eine allgemeingültige obere Schranke für die Mindestanzahl benötigter Farben, die sich von der tatsächlichen Anzahl um höchstens 1 unterscheidet, und das Gleiche wird für Totalfärbungen vermutet. In den beiden Abschnitten 2.1 und 2.2 werden Definitionen und grundlegende Ergebnisse zur Kanten- beziehungsweise Totalfärbung vorgestellt sowie Resultate für bestimmte Klassen von Graphen angegeben.

2.1 Kantenfärbung

Die Kantenfärbung eines Graphen G kann man auch als Knotenfärbung des Kantengraphen $L(G)$ auffassen, der folgendermaßen definiert ist:

Definition 2.2 Für einen Graph $G = (V, E)$ wird der Kantengraph $L(G) = (V', E')$ von G wie folgt gebildet:

$$V' = \{v_e : e \in E\} \quad \text{und} \quad E' = \{v_{e_i}v_{e_j} : e_i, e_j \in E \text{ und } e_i \sim e_j \text{ in } G\}.$$

Für jeden Graph G lässt sich ein Kantengraph $L(G)$ bilden. Auf der anderen Seite gibt es jedoch nicht zu jedem Graph H einen Graph G mit $L(G) = H$. Die Kantenfärbung beschäftigt sich somit mit der Knotenfärbung von Kantengraphen. Es bietet sich jedoch an, Kantenfärbungen unabhängig von Knotenfärbungen zu definieren, da so eine Reihe interessanter Eigenschaften dieser speziellen Art der Färbung sichtbar werden.

Definition 2.3 Es sei G ein Graph mit Kantenmenge E . Eine Abbildung $c : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ heißt k -Kantenfärbung von G , wenn für je zwei benachbarte Kanten $e_i, e_j \in E$ gilt $c(e_i) \neq c(e_j)$. Die kleinste Zahl k , für die G eine k -Kantenfärbung besitzt, wird mit $\chi'(G)$ bezeichnet und heißt chromatischer Index (in manchen Arbeiten auch kantenchromatische Zahl) von G . Ist G kantengefärbt, so wird eine Menge von Kanten gleicher Farbe eine Farbklassse der Kantenfärbung von G genannt.

Die folgenden Unterabschnitte behandeln die Eigenschaften des chromatischen Index (Abschnitt 2.1.1) und die Werte $\chi'(G)$ für einige Graphen G , für die der chromatische Index bereits bekannt ist (Abschnitt 2.1.2). Einen Überblick über das Thema Kantenfärbung bis zum Jahr 1977 gibt das Buch *Edge-Colourings of Graphs* von Fiorini und Wilson [44]; viele Ergebnisse sind darüber hinaus bei Hackmann [52] zu finden.

2.1.1 Eigenschaften des chromatischen Index

Auch bei der Untersuchung des chromatischen Index von Graphen kann man sich auf zusammenhängende Graphen beschränken, denn der chromatische Index eines nicht zusammenhängenden Graphen ist gleich dem Maximum der chromatischen Indexe seiner Komponenten. Im Folgenden wird daher, wenn nicht anders angegeben, immer vorausgesetzt, dass die betrachteten Graphen zusammenhängend sind.

Da eine Kantenfärbung eines Graphen G die Kantenmenge $E(G)$ des Graphen in Mengen von unabhängigen Kanten partitioniert, ist die Anzahl benötigter Farben von der maximalen Anzahl paarweise nicht benachbarter Kanten abhängig, die mit $\alpha'(G)$ bezeichnet wird.

Definition 2.4 Die Kantenunabhängigkeitszahl $\alpha'(G)$ eines Graphen G gibt die maximale Anzahl paarweise nicht benachbarter Kanten in G an.

Da jede Kante zu genau zwei Knoten inzident ist und die $2k$ Knoten, die zu k unabhängigen Kanten inzident sind, paarweise verschieden sein müssen, erhält man als Abschätzung für die Kantenunabhängigkeitszahl eines Graphen G mit p Knoten

$$\alpha'(G) \leq \lfloor p/2 \rfloor.$$

Dabei gibt die *Bodenfunktion* (auch *Gaußklammer* genannt) $\lfloor x \rfloor$ die größte Zahl $y \in \mathbb{Z}$ mit $y \leq x$ an, während die *Dachfunktion* $\lceil x \rceil$ die kleinste Zahl $y \in \mathbb{Z}$ mit $y \geq x$ bezeichnet.

Bemerkung 2.1 Mit obiger Überlegung gilt für den chromatischen Index eines Graphen G der Ordnung p und Größe q mit Kantenunabhängigkeitszahl α'

$$\chi'(G) \geq \frac{q}{\alpha'} \geq \begin{cases} \frac{2q}{p} & \text{falls } p \text{ gerade} \\ \frac{2q}{p-1} & \text{falls } p \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Eine weitere untere Schranke für den chromatischen Index eines Graphen G ergibt sich aus dem Maximalgrad Δ von G : Da die Δ zu einem Knoten mit Maximalgrad inzidenten Kanten alle verschiedene Farben erhalten müssen, gilt $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Das wichtigste Ergebnis der Kantenfärbung, der Satz 2.3 von Vizing [99, 100], besagt, dass diese triviale untere Schranke erstaunlich genau ist — der tatsächliche Wert des chromatischen Index unterscheidet sich vom Wert der Schranke um höchstens 1.

Satz 2.3 (Satz von Vizing) Ist G ein Graph mit Maximalgrad Δ , so gilt

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1.$$

Im Gegensatz zur Knotenfärbung, in der wie bereits erwähnt zu jeder Zahl $n \geq 1$ ein Graph G angegeben werden kann, so dass die Differenz zwischen der im Satz 2.2 von Brooks angegebene Schranke für die chromatische Zahl und ihrem tatsächlichen Wert mindestens n ist, gibt es in der Kantenfärbung also abhängig vom Maximalgrad $\Delta(G)$ immer nur zwei Möglichkeiten für den chromatischen Index eines Graphen G : Entweder gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$ oder $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Diese Überlegung führt zu einer Einteilung aller Graphen in zwei Klassen bezüglich ihres chromatischen Index:

Definition 2.5 Ein $\Delta(G)$ -kantenfärbbarer Graph G gehört zur Klasse 1; benötigt man für die Kantenfärbung von G dagegen $\Delta(G) + 1$ Farben, so spricht man von einem Graph der Klasse 2.

Eine Hauptaufgabe in der Kantenfärbung besteht seit Vizings Beweis von Satz 2.3 in der so genannten *Klassifizierung* von Graphen, nämlich in ihrer Einteilung in die beiden Klassen 1 und 2.

2.1.2 Klassifizierung von Graphen

In diesem Abschnitt sollen einige Graphen und Graphenklassen angegeben werden, für die der chromatische Index bereits bekannt ist.

Graphen mit kleinem Maximalgrad

Ist G zusammenhängend mit $\Delta(G) = 1$, so ist der Graph isomorph zum K_2 und besitzt nur eine Kante; somit gehört er zur Klasse 1. Ein Graph mit Maximalgrad $\Delta = 2$ ist entweder ein Weg — und gehört damit ebenso zur Klasse 1 — oder ein Kreis; auch für diese Graphen ist der chromatische Index leicht zu bestimmen.

Satz 2.4 Für einen Kreis C_p , wobei p die Ordnung des Graphen angibt, gilt

$$\chi'(C_p) = \begin{cases} 2 & \text{falls } p \text{ gerade} \\ 3 & \text{falls } p \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Somit gehört ein Graph G mit Maximalgrad $\Delta \leq 2$ genau dann zur Klasse 2, wenn G ein Kreis mit ungerader Knotenzahl ist.

Überfüllte Graphen und Graphen mit großem Maximalgrad

Mit den Überlegungen aus Abschnitt 2.1.1 über den Zusammenhang zwischen der Kantenunabhängigkeitszahl eines Graphen und seinem chromatischen Index kann man eine Klasse von Graphen definieren, die schon aufgrund ihrer Kantenzahl zur Klasse 2 gehören. Diese Betrachtung ist implizit schon bei Vizing [100] enthalten.

Definition 2.6 Ein Graph G mit Maximalgrad Δ und Ordnung p heißt überfüllt, wenn für seine Kantenzahl q gilt

$$q > \Delta \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

Anderenfalls heißt G nicht-überfüllt.

Bemerkung 2.2 Ein überfüllter Graph hat immer eine ungerade Anzahl von Knoten: Gilt für einen Graph G mit Maximalgrad Δ , dass seine Ordnung $p = 2k$ beträgt, so ist $\Delta \lfloor p/2 \rfloor = \Delta p/2 \geq q$, und G ist nicht-überfüllt.

Dass überfüllte Graphen zur Klasse 2 gehören, folgt aus Bemerkung 2.1: Da ein überfüllter Graph G ungerade Knotenzahl hat, gilt $\chi'(G) \geq 2q/(p-1)$; mit der Definition überfüllter Graphen ergibt sich $\chi'(G) > \Delta$.

Ein Beispiel für überfüllte Graphen sind vollständige Graphen K_p mit ungerader Knotenzahl p : Diese Graphen haben Maximalgrad $\Delta = p - 1$ und Kantenzahl $q = \Delta p/2 > \Delta \lfloor p/2 \rfloor$. Somit gehören vollständige Graphen mit ungerader Knotenzahl zur Klasse 2. Der chromatische Index aller vollständigen Graphen wurde bereits von mehreren Autoren bestimmt, zum Beispiel von Vizing [100], von Behzad, Chartrand und Cooper [10] und von Berge [12, S. 249].

Satz 2.5 *Für einen vollständigen Graph K_p gilt*

$$\chi'(K_p) = \begin{cases} p - 1 & \text{falls } p \text{ gerade} \\ p & \text{falls } p \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aus dem gleichen Grund sind auch andere reguläre Graphen überfüllt, wenn sie eine ungerade Anzahl von Knoten haben. Ein r -regulärer Graph ungerader Knotenzahl bleibt sogar überfüllt, wenn man weniger als $r/2$ Kanten entfernt. Somit gehören diese Graphen ebenfalls zur Klasse 2.

Satz 2.6 *Ist G ein Graph ungerader Knotenzahl, der durch Entfernen von weniger als $r/2$ Kanten aus einem r -regulären Graph entsteht, so gehört G zur Klasse 2.*

Nicht vollständige Graphen gerader Ordnung p mit Maximalgrad $\Delta(G) = p - 1$ gehören aufgrund von Satz 2.5 zur Klasse 1. Für allgemeine Werte p lässt sich der chromatische Index von Graphen der Ordnung p und mit Maximalgrad $p - 1$ mit folgende Satz von Plantholt [87] bestimmen.

Satz 2.7 *Ein Graph der Ordnung p mit Maximalgrad $p - 1$ gehört genau dann zur Klasse 1, wenn er nicht überfüllt ist.*

Ist G ein $(p - 2)$ -regulärer Graph mit p Knoten, so ist p gerade und der Graph isomorph zum unten definierten *zirkulanten* Graph $C_p(1, \dots, (p - 2)/2)$ (siehe Seite 16). Nach Satz 2.12 gehört G somit zur Klasse 1.

Für allgemeine reguläre Graphen ist die Frage, ob sie zur Klasse 1 oder zur Klasse 2 gehören, noch nicht entschieden. Eine Vermutung, von der nicht bekannt ist, wo sie erstmals erschien (siehe zum Beispiel Chetwynd und Hilton [30]), besagt, dass alle r -regulären Graphen gerader Ordnung mit hinreichend großem r zur Klasse 1 gehören.

Vermutung 2.1 *Ist G ein r -regulärer Graph der Ordnung $2n$ und gilt*

$$r \geq 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1,$$

so gehört G zur Klasse 1.

Neben den bereits behandelten Fällen $r = 2n - 1$ und $r = 2n - 2$ ist Vermutung 2.1 auch für r -reguläre Graphen mit $2n$ Knoten und $r \in \{2n - 3, 2n - 4, 2n - 5\}$ bereits bewiesen. Das Ergebnis stammt von Chetwynd und Hilton [30] und liefert den folgenden Satz.

Satz 2.8 *Ist G ein r -regulärer Graph der Ordnung $2n$ und gilt $r \geq 2n - 5$, so gehört G zur Klasse 1.*

Für Graphen mit großer Knotenzahl ist der folgende Satz, ebenfalls von Chetwynd und Hilton [30], noch schärfer.

Satz 2.9 *Ist G ein r -regulärer Graph mit gerader Ordnung p und gilt $r \geq 6p/7$, so gehört G zur Klasse 1.*

Bemerkung 2.3 *Ist G ein r -regulärer Graph mit Brücke, wobei man unter einer Brücke eines zusammenhängenden Graphen G eine Kante versteht, deren Entfernung den Graphen in mehrere Komponenten zerfallen lässt, so lässt sich leicht zeigen, dass der Graph zur Klasse 2 gehört. Dabei sei ein Δ -überfüllter Teilgraph eines Graphen G mit Maximalgrad Δ ein überfüllter Teilgraph H von G , der den gleichen Maximalgrad wie G besitzt. Da man zur Kantenfärbung eines Δ -überfüllten Teilgraphen $\Delta + 1$ Farben benötigt, gehört auch jeder Graph, der einen Δ -überfüllten Teilgraph enthält, zur Klasse 2.*

Ist G ein r -regulärer Graph mit $r \geq 3$ und $e \in E(G)$ eine Brücke von G , so haben die beiden Komponenten H_i von $G - e$ für $i = 1, 2$ die Ordnung p_i , Maximalgrad $\Delta_i = \Delta(G) = r$ und Kantenzahl $q_i = (r(p_i - 1) + r - 1)/2$. Somit gilt $q_i > \Delta_i(p_i - 1)/2$, und die beiden Teilgraphen H_i von G sind $\Delta(G)$ -überfüllt. Also gehört G zur Klasse 2.

Bipartite und vollständig r -partite Graphen

Eine der ersten Klassen von Graphen, für die der chromatische Index bestimmt wurde, sind die bipartiten Graphen. Ein Graph $K_{m,n}$ heißt *vollständig bipartit*, wenn für seine Knotenmenge $V = U \cup W$ mit $|U| = m$ und $|W| = n$ und für seine Kantenmenge $E = \{uw : u \in U \text{ und } w \in W\}$ gilt. Ein *bipartiter* Graph ist ein Graph, der Teilgraph eines vollständig bipartiten Graphen ist.

König [77] zeigte schon 1916, dass für einen bipartiten Graph G immer $\chi'(G) = \Delta(G)$ gilt.

Satz 2.10 (Satz von König) *Jeder bipartite Graph gehört zur Klasse 1.*

Eine Verallgemeinerung der bipartiten Graphen bilden die r -partiten Graphen. Ein Graph K_{n_1, \dots, n_r} mit $r \geq 2$ heißt *vollständig r -partit*, wenn für seine Knotenmenge

$V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ mit $|V_i| = n_i$ für $i = 1, \dots, r$ und für seine Kantenmenge $E = \{uw : u \in V_i \text{ und } w \in V \setminus V_i \text{ für } i = 1, \dots, r\}$ gilt. Für vollständig r -partite Graphen konnten Hoffman und Rodger [67] den chromatischen Index 1992 bestimmen.

Satz 2.11 *Ein vollständig r -partiter Graph K_{n_1, \dots, n_r} gehört genau dann zur Klasse 2, wenn er überfüllt ist.*

Um überfüllt zu sein, muss der Graph K_{n_1, \dots, n_r} nach Bemerkung 2.2 eine ungerade Knotenzahl haben. Es sei $G = K_{n_1, \dots, n_r}$ mit $n_1 \leq n_i$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $\sum_{i=1}^r n_i$ ungerade. Dann gilt

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^r n_i, \quad |E(G)| = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r n_i n_j \quad \text{und} \quad \Delta(G) = \sum_{i=2}^r n_i.$$

Der Graph ist somit genau dann überfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r n_i n_j &> \sum_{i=2}^r n_i \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^r n_i - 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r n_i n_j + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^r (n_i^2 - n_1 n_i - n_i) \end{aligned}$$

gilt, also

$$\sum_{i=2}^r n_i > \sum_{i=2}^r n_i (n_i - n_1).$$

Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn alle Partitions Mengen die gleiche Anzahl Knoten enthalten. Ein solcher vollständig r -partiter Graph K_{n_1, \dots, n_r} mit $n_1 = \dots = n_r = n$ wird *balanciert* genannt, und man verwendet die abkürzende Schreibweise $K_{n_1, \dots, n_r} = K(r, n)$.

Korollar 2.1 *Balancierte vollständig r -partite Graphen $K(r, n)$ gehören genau dann zur Klasse 2, wenn ihre Ordnung rn ungerade ist.*

Zirkulante Graphen

Ein zirkulanter Graph $C_p(a_1, \dots, a_r)$ mit $a_i \in \mathbb{N}$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $a_1 < a_2 < \dots < a_r \leq p/2$ hat p Knoten v_0, \dots, v_{p-1} und die Kantenmenge $\{v_i v_j : i - j \equiv \pm a_t \pmod{p} \text{ für ein } t \text{ mit } 1 \leq t \leq r\}$. Die Menge $\{a_1, \dots, a_r\}$ wird auch die *Distanzmenge* von $C_p(a_1, \dots, a_r)$ genannt.

Ein zirkulanter Graph $C_p(a_1, \dots, a_r)$ ist genau dann regulär vom Grad $2r - 1$, wenn $a_r = p/2$ gilt; ansonsten ist er $2r$ -regulär. Der chromatische Index einiger spezieller zirkulanter Graphen wurde bereits im vorangegangenen Text beschrieben: So besteht der Graph $C_p(p/2)$ für gerade p aus $p/2$ unabhängigen Kanten und gehört somit zur Klasse 1, während $C_p(a)$ mit $a < p/2$ ein Kreis oder eine Vereinigung mehrerer Kreise ist, für die der chromatische Index in Satz 2.4 angegeben wurde. Der Graph $C_p(1, 2, \dots, \lfloor p/2 \rfloor)$ ist zudem isomorph zum vollständigen Graph K_p , dessen chromatischen Index Satz 2.5 liefert. Aber auch für alle anderen zirkulanten Graphen lässt sich der chromatische Index bestimmen: Mit Satz 2.12 von Hattingh [61] ist diese Graphenklasse vollständig klassifiziert. Dabei sei mit $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k)$ der größte gemeinsame Teiler von n_1, \dots, n_k bezeichnet.

Satz 2.12 *Ein zirkulanter Graph $C_p(a_1, \dots, a_r)$ mit $\text{ggT}(a_1, \dots, a_r, p) = l$ gehört genau dann zur Klasse 1, wenn p/l gerade ist.*

Einige Eigenschaften zirkulanter Graphen werden in Abschnitt 2.2.3 im Zusammenhang mit Totalfärbung näher erläutert.

Planare Graphen

Die ersten Graphen, für die der chromatische Index untersucht wurde, sind 3-reguläre planare Graphen ohne Brücken. Der Grund für das frühe Interesse am chromatischen Index dieser Graphen war die Entdeckung, dass das berühmte Vierfarbenproblem äquivalent zu der Frage ist, ob 3-reguläre planare Graphen ohne Brücken 3-kantenfärbbar sind (Tait [93]). Da der Vierfarbensatz inzwischen bewiesen ist, folgt somit, dass diese Graphen zur Klasse 1 gehören.

Satz 2.13 *Jeder 3-reguläre, brückenlose planare Graph gehört zur Klasse 1.*

3-reguläre planare Graphen mit Brücke gehören nach Bemerkung 2.3 zur Klasse 2. Somit folgt die Aussage von Korollar 2.2.

Korollar 2.2 *Ein 3-regulärer planarer Graph gehört genau dann zur Klasse 1, wenn er brückenlos ist.*

Der chromatische Index planarer Graphen G wurde vor allem in Abhängigkeit des Maximalgrades von G betrachtet. Für jede natürliche Zahl k kann man leicht einen planaren Graph G mit $\Delta(G) = k$ finden, der zur Klasse 1 gehört: Zum Beispiel sind alle Graphen S_{k+1} mit $V(S_{k+1}) = \{v_0, \dots, v_k\}$ und $E(S_{k+1}) = \{v_0v_i : i = 1, \dots, k\}$, auch *Sterne* genannt, Klasse-1-Graphen mit Maximalgrad $\Delta(S_{k+1}) = k$. Für jede Zahl $2 \leq k \leq 5$ gibt es jedoch auch einen planaren Klasse-2-Graph G mit $\Delta(G) = k$: Für $k = 2$ ist dies zum Beispiel der Graph C_3 ,

für $k = 3, 4$ beziehungsweise 5 die Graphen, die durch Unterteilung einer Kante des Tetraedergraphen, des Oktaedergraphen beziehungsweise des Ikosaedergraphen entstehen.

Es gibt also sowohl planare Klasse-1-Graphen also auch planare Klasse-2-Graphen mit Maximalgrad Δ , wenn $\Delta \leq 5$ gilt; eine allgemeine Klassifikation dieser Graphen ist bisher nicht bekannt.

Im Unterschied dazu sind planare Graphen mit großem Maximalgrad bereits weitestgehend klassifiziert. Vizing [100] vermutete schon 1965, dass alle Graphen G mit Maximalgrad $\Delta \geq 6$ zur Klasse 1 gehören.

Vermutung 2.2 *Alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 6$ gehören zur Klasse 1.*

Die Vermutung konnte von Vizing zunächst für $\Delta \geq 10$ [100] und kurz darauf für $\Delta \geq 8$ [101] bewiesen werden; der Fall $\Delta = 7$ wurde 1999 von Sanders [91] bestätigt.

Satz 2.14 *Alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 7$ gehören zur Klasse 1.*

Für $\Delta = 6$ konnte 1998 gezeigt werden, dass alle Graphen mit diesem Maximalgrad und höchstens 10 Knoten zur Klasse 1 gehören (Hackmann [52]). Unter Berücksichtigung neuer Ergebnisse über kritische Graphen (Korollar 3.2) lässt sich dieses Ergebnis auf Graphen mit bis zu 14 Knoten erweitern (siehe Korollar 3.3). Somit müssen nur noch planare Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 6$ und Ordnung $p \geq 15$ untersucht werden.

Noch bessere Ergebnisse erhält man, wenn man zusätzlich zur Schranke für den Maximalgrad eines planaren Graphen G auch Bedingungen an die *Tailenweite* g von G stellt. Dieser Wert gibt die Länge eines kürzesten in G enthaltenen Kreises an. Sind sowohl für $\Delta(G)$ als auch für $g(G)$ untere Schranken bekannt, so ergeben sich nach Satz 2.15 von Fiorini [42] die folgenden Werte für den chromatischen Index.

Satz 2.15 *Ist G ein planarer Graph mit Maximalgrad Δ und Tailenweite g , so gilt*

$$\chi'(G) = \Delta \quad \text{für} \quad \begin{cases} \Delta \geq 8 & \text{und} & g \geq 3 \\ \Delta \geq 5 & \text{und} & g \geq 4 \\ \Delta \geq 4 & \text{und} & g \geq 5 \\ \Delta \geq 3 & \text{und} & g \geq 8. \end{cases}$$

Eine Teilmenge der planaren Graphen bilden die so genannten *outerplanaren Graphen*. Ein planarer Graph heißt outerplanar, wenn er eine Darstellung besitzt, bei der alle Knoten auf dem Rand derselben Fläche — ohne Einschränkung auf dem Rand der Außenfläche — liegen. Der chromatische Index outerplanarer Graphen wurde von Fiorini [43] bestimmt.

Satz 2.16 *Alle outerplanaren Graphen gehören zur Klasse 1.*

Snarks

Das schon erwähnte große Interesse an der Bestimmung des chromatischen Index 3-regulärer planarer Graphen ohne Brücken, um die Vierfarbenvermutung zu beweisen oder zu widerlegen, führte zu dem Versuch, 3-reguläre, brückenlose planare Graphen mit chromatischem Index 4 zu konstruieren, deren Existenz einen Widerspruch zur Vierfarbenvermutung bedeutet hätte (siehe Satz 2.13). Seit dem Beweis des Vierfarbensatzes steht fest, dass solche Graphen nicht existieren können; es wurde jedoch weiter nach — nicht planaren — 3-regulären, brückenlosen Graphen der Klasse 2 gesucht. Da solche Graphen nicht einfach zu finden sind, erhielten sie in einem populärwissenschaftlichen Artikel von Gardner [46] in Anlehnung an Lewis Carrolls *The hunting of the Snark* ihren Namen *Snarks*.

Zur Vermeidung trivialer Fälle werden bei der Definition von Snarks oft Bedingungen an die Taillenweite und den Kantenzusammenhang gestellt. Dabei heißt ein Graph G *kreis- k -kantenzusammenhängend*, wenn es für keine Knotenmenge $V' \subseteq V(G)$ eine trennende Kantenmenge $E'(V')$ der Größe $|E'(V')| < k$ gibt, so dass jede Kante aus $E'(V')$ zu genau einem Knoten aus V' inzident ist und sowohl der von V' als auch der von $V \setminus V'$ aufgespannte Graph mindestens einen Kreis enthält.

Definition 2.7 *Ein Snark ist ein brückenloser, 3-regulärer Graph der Klasse 2. Zusätzlich sei gefordert, dass ein Snark für ein $k \geq 4$ kreis- k -kantenzusammenhängend ist und für seine Taillenweite $g \geq 5$ gilt.*

Der kleinste Snark ist der im Jahr 1898 konstruierte Petersen-Graph P , der in Abbildung 2.1 links dargestellt ist. Es dauerte fast fünfzig Jahre, bis es 1946 beziehungsweise 1948 gelang, zwei weitere Snarks zu konstruieren: den Blanuša-Snark der Ordnung 18 und den Descarte-Snark der Ordnung 210. Der vierte Snark, ein Graph mit 50 Knoten, wurde schließlich im Jahr 1973 von Szekeres entdeckt. Nach diesen Einzelergebnissen war es ein bedeutender Schritt, als Isaacs 1975 zwei unendliche Familien von Snarks beschreiben konnte, von denen eine alle vier bisher bekannten Snarks enthielt [68]; die andere Familie der so genannten *Blumen-Snarks* war zu diesem Zeitpunkt noch gänzlich unbekannt. Er entdeckte zudem einen weiteren Snark, den *Doppelstern-Snark*, der zu keiner der beiden Familien gehört. Später konnten noch weitere Snarks beziehungsweise Familien von Snarks gefunden werden, darunter genau ein weiterer Snark der Ordnung 18, der so genannte *Preissmann Snark* von Preissmann [88].

Einige Ergebnisse gibt es über die mögliche Ordnung eines Snarks: Aufgrund der 3-Regularität muss ein Snark gerader Ordnung $p \geq 4$ sein. Es existieren keine Snarks der Ordnung 4, 6 oder 8; darüber hinaus bewies Fiorini, dass es keine Snarks der Ordnung 12 oder 14 gibt, und Fouquet [45] zeigte, dass auch keine Snarks mit 16 Knoten existieren. Da der Petersen-Graph zudem der einzige Snark mit 10 Knoten ist, sind somit der Petersen-Graph, der Blanuša-Snark und der Preissmann

Snark die drei Snarks kleinster Ordnung (siehe Abbildung 2.1). Für jede beliebige gerade Zahl $p > 16$ existiert jedoch ein Snark der Knotenzahl p .

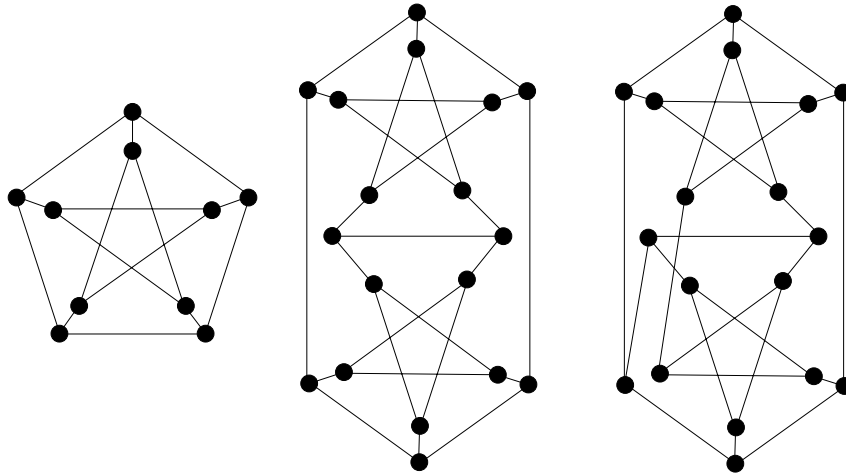


Abbildung 2.1: Die drei Snarks der Ordnung $p \leq 18$.

In aktuellen Arbeiten wird untersucht, welche bekannten Snarks aus Teilgraphen zusammengesetzt sind, die wiederum Snarks sind. Auf diese Weise lassen sich *irreduzible* Snarks definieren und Snarks anhand ihrer Teilgraphen charakterisieren. Alle Snarks mit weniger als 30 Knoten konnten so bestimmt werden; darüber hinaus wurde gezeigt, dass jeder Snark der Ordnung $p \leq 26$ mit Ausnahme des Petersen-Graphen aus zwei kleineren Snarks konstruiert werden kann (siehe Cavicchioli, Meschiari, Ruini und Spaggiari [25] sowie Brinkmann und Steffen [22]).

Insgesamt lässt sich feststellen, dass es verhältnismäßig wenige Graphen der Klasse 2 gibt. Diese Beobachtung wird von einem Satz von Erdős und Wilson [41] bestätigt: Für einen beliebigen Graph G der Ordnung p geht die Wahrscheinlichkeit, dass G zur Klasse 1 gehört, für $p \rightarrow \infty$ gegen 1. Aus diesem Grund ist man besonders an der Charakterisierung von Klasse-2-Graphen interessiert. Hilfreich ist dabei die Definition von *kritischen Graphen der Kantenfärbung*, die in Kapitel 3 behandelt werden. Im Zusammenhang mit Kreiskantenfärbung kleiner Graphen sind in Abschnitt 4.1.3 alle Klasse-2-Graphen mit bis zu 7 Knoten dargestellt (Abbildungen 4.4 bis 4.6).

2.2 Totalfärbung

Während die Idee der Flächenfärbung und damit auch der Knoten- und schließlich Kantenfärbung schon zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts entstand, wurde die Totalfärbung von Graphen erst in den sechziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts unabhängig voneinander von Behzad [8] und Vizing [99] definiert. Bei dieser

Färbung werden nicht entweder die Knoten oder die Kanten des Graphen gefärbt, sondern Knoten und Kanten gleichzeitig, also alle Elemente $x \in V(G) \cup E(G)$ des Graphen G . Dabei sollen zwei benachbarte Elemente — also zwei adjazente Knoten, zwei adjazente Kanten oder ein Knoten und eine inzidente Kante — immer unterschiedliche Farben erhalten. Gesucht ist wiederum die kleinstmögliche Anzahl von Farben, mit der eine Färbung möglich ist.

Definition 2.8 *Es sei G ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E . Eine Abbildung $c : V \cup E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ heißt k -Totalfärbung von G , wenn für je zwei benachbarte Elemente $x_i, x_j \in V \cup E$ gilt $c(x_i) \neq c(x_j)$. Die kleinste Zahl k , für die G eine k -Totalfärbung besitzt, wird mit $\chi''(G)$ bezeichnet und heißt totalchromatische Zahl von G .*

Wie in der Kantenfärbung, die für einen Graph G wie erwähnt äquivalent zur Knotenfärbung des Kantengraphen $L(G)$ ist, ist die Totalfärbung von G äquivalent zur Knotenfärbung des Totalgraphen $T(G)$, der folgendermaßen gebildet wird:

$$\begin{aligned} V(T(G)) &= V(G) \cup \{v_e : e \in E(G)\} \quad \text{und} \\ E(T(G)) &= E(G) \cup \{v_{e_i}v_{e_j} : e_i, e_j \in E(G) \text{ und } e_i \sim e_j \in G\} \\ &\quad \cup \{vv_e : v \in V(G), e \in E(G) \text{ und } v \sim e \text{ in } G\}. \end{aligned}$$

Einen guten Überblick über das Thema Totalfärbung von Graphen vermittelt das Buch *Total Colourings of Graphs* von Yap [109], dem auch einige Sätze aus den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.3 entnommen sind. Ergebnisse zur Total- und Listentotalfärbung finden sich darüber hinaus bei Gottschalk [49].

2.2.1 Eigenschaften der totalchromatischen Zahl

Auch in der Totalfärbung kann man sich bei der Untersuchung der totalchromatischen Zahl auf zusammenhängende Graphen beschränken, da für einen unzusammenhängenden Graph G der Wert $\chi''(G)$ stets gleich dem Maximum der Zahlen $\chi''(K)$ aller Komponenten K von G ist.

Eine k -Totalfärbung eines Graphen G teilt die Menge $V(G) \cup E(G)$ in k unabhängige Mengen $V_1 \cup E_1, \dots, V_k \cup E_k$. Somit gibt es einen Zusammenhang zwischen der totalchromatischen Zahl und der maximalen Anzahl paarweise nicht benachbarter Elemente eines Graphen G .

Definition 2.9 *Die Mächtigkeit einer maximalen unabhängigen Menge von Elementen aus $V(G) \cup E(G)$ eines Graphen G ist die totale Unabhängigkeitszahl von G und wird mit $\alpha''(G)$ bezeichnet.*

Bemerkung 2.4 *Mit obiger Überlegung gilt für jeden Graph G mit p Knoten, q Kanten und totaler Unabhängigkeitszahl α''*

$$\chi''(G) \geq \frac{p+q}{\alpha''}.$$

Die totale Unabhängigkeitszahl $\alpha''(G)$ lässt sich mit Hilfe der Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ — der maximalen Anzahl paarweise unabhängiger Knoten von G — und einer Schranke für die Kantenunabhängigkeitszahl eines Graphen abschätzen. Ist S eine unabhängige Knotenmenge in G , so ist die maximale Anzahl unabhängiger Kanten im Graph $G - S$ nach Überlegungen aus Abschnitt 2.1.1 höchstens $\lfloor (p - |S|)/2 \rfloor$. Wählt man für S eine maximale unabhängige Knotenmenge, so wird die Zahl $\lfloor |S| + (p - |S|)/2 \rfloor$ maximal; also gilt folgende Abschätzung:

Bemerkung 2.5 *Ist α die Unabhängigkeitszahl eines Graphen G und α'' seine totale Unabhängigkeitszahl, so gilt*

$$\alpha'' \leq \alpha + \left\lfloor \frac{p - \alpha}{2} \right\rfloor.$$

Mit den Bemerkungen 2.4 und 2.5 wird die totalchromatische Zahl nach unten beschränkt. Eine andere untere Schranke für $\chi''(G)$ eines Graphen G erhält man, wenn man einen Knoten mit Maximalgrad Δ und die Δ zum Knoten inzidenten Kanten färben will: Dazu sind $\Delta + 1$ Farben nötig. Somit gilt $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ für jeden Graph G .

Analog zur Kantenfärbung, für die Vizing zeigen konnte, dass der chromatische Index eines Graphen G immer gleich $\Delta(G)$ oder $\Delta(G) + 1$ ist (Satz 2.3), vermuteten sowohl Behzad [8] als auch Vizing [99] bereits 1965, dass jeder Graph G eine $(\Delta(G) + 2)$ -Totalfärbung besitzt. Diese Vermutung — die so genannte *totalchromatische Vermutung* — ist bis heute jedoch unbewiesen; sie konnte nur für einzelne Klassen von Graphen bestätigt werden.

Vermutung 2.3 (Totalchromatische Vermutung) *Für jeden Graph G mit Maximalgrad Δ gilt*

$$\chi''(G) \leq \Delta + 2.$$

Gilt die totalchromatische Vermutung, so lassen sich alle Graphen anhand ihrer totalchromatischen Zahl wiederum in zwei Gruppen unterteilen.

Definition 2.10 *Ist G ein Graph mit $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, so ist G vom Typ 1; gilt dagegen $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, so ist G vom Typ 2.*

Da man noch weit davon entfernt ist, die totalchromatische Vermutung für allgemeine Graphen zu beweisen, sind auch schwächere obere Schranken für die totalchromatische Zahl interessant, die die triviale obere Schranke $\chi''(G) \leq 2\Delta(G) + 1$ verbessern. Diese ergibt sich, weil jedes Element $x \in V(G) \cup E(G)$ in einem Graph G zu höchstens $2\Delta(G)$ anderen Elementen von G benachbart ist.

Für planare Graphen ist eine obere Schranke in Abschnitt 2.2.2 angegeben. Hier sollen nur zwei Ergebnisse aufgeführt werden, die $\chi''(G)$ ausschließlich in Abhängigkeit vom Maximalgrad des Graphen G nach oben beschränken. Der erste Satz stammt von Kostochka [80] und gilt für alle Graphen (und sogar für alle Multigraphen) mit Maximalgrad $\Delta \geq 4$.

Satz 2.17 *Ist G ein Multigraph mit Maximalgrad $\Delta \geq 4$, so gilt*

$$\chi''(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \Delta \right\rfloor.$$

Für Graphen mit großer Ordnung p und in Abhängigkeit von p auch großem Maximalgrad Δ gibt Satz 2.18 von Hind [65] eine noch bessere Abschätzung.

Satz 2.18 *Für jeden Graphen G der Ordnung p mit Maximalgrad Δ gilt*

$$\chi''(G) \leq \Delta + 2 \left\lceil \frac{p}{\Delta} \right\rceil + 1.$$

2.2.2 Die totalchromatische Vermutung

In diesem Abschnitt werden Graphenklassen vorgestellt, für die die totalchromatische Vermutung bereits bestätigt ist.

Graphen mit kleinem Maximalgrad

Für Graphen mit kleinem Maximalgrad ist Vermutung 2.3 bereits bewiesen. Für $\Delta(G) = 1$ ist die Aussage klar. Für $\Delta(G) = 2$ ist G entweder ein Kreis oder ein Weg, und für diese beiden Graphenklassen wurde die totalchromatische Vermutung bereits 1971 von Behzad, Chartrand und Cooper [10] bewiesen.

Satz 2.19 *Ist G ein Graph mit Maximalgrad $\Delta = 2$, so gilt*

$$\chi''(G) \leq \Delta + 2 = 4.$$

Auch für Graphen mit Maximalgrad 3 wurde Vermutung 2.3 bereits Anfang der siebziger Jahre unabhängig voneinander von Rosenfeld [90] und Vijayaditya [97] bestätigt. 1977 konnte Kostochka [78] die totalchromatische Vermutung schließlich für Graphen mit Maximalgrad 4 und 1978 für Graphen mit Maximalgrad 5 beweisen [79]; der lange Beweis des letzten Ergebnisses wurde von ihm im Jahr 1996 noch einmal vereinfacht und ist in dieser Form in [81] nachzulesen.

Satz 2.20 *Jeder Graph G mit Maximalgrad $\Delta \leq 5$ erfüllt die totalchromatische Vermutung $\chi''(G) \leq \Delta + 2$.*

Graphen mit großem Maximalgrad

Neben den Graphen mit kleinem Maximalgrad konnte die totalchromatische Vermutung auch für Graphen, deren Maximalgrad Δ im Verhältnis zur Knotenzahl p relativ groß ist, bestätigt werden. Die entsprechenden Sätze 2.21 von Yap und Chew [110] und 2.22 von Hilton und Hind [64] stammen aus den Jahren 1992 beziehungsweise 1993; die Beweise sind jeweils außer in den Originalarbeiten auch bei Yap [109] dargestellt. Die Aussage von Satz 2.22 wurde 1995 von Chew [32] noch leicht erweitert auf alle Graphen mit Knotenzahl p und Maximalgrad $\Delta > 3p/4 - 1/2$.

Satz 2.21 *Ist G ein Graph mit Knotenzahl p und Maximalgrad $\Delta \geq p - 5$, so gilt die totalchromatische Vermutung $\chi''(G) \leq \Delta + 2$.*

Satz 2.22 *Ist G ein Graph mit Knotenzahl p und Maximalgrad $\Delta \geq 3p/4$, so gilt die totalchromatische Vermutung $\chi''(G) \leq \Delta + 2$.*

Bipartite und vollständig r -partite Graphen

Bipartite und vollständig r -partite Graphen wurden bereits in Abschnitt 2.1.2 definiert. Ist G ein bipartiter Graph, so lassen sich die Knoten von G , wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, mit zwei Farben färben; mit Hilfe eines Ergebnisses zur Listenkantenfärbung bipartiter Graphen (Satz 5.6) können die Kanten von G anschließend so mit $\Delta(G)$ Farben gefärbt werden, dass sich eine zulässige Totalfärbung des Graphen ergibt.

Satz 2.23 *Ist G ein bipartiter Graph, so gilt die totalchromatische Vermutung $\chi''(G) \leq \Delta + 2$.*

Für vollständig r -partite Graphen konnte Yap [109] die Vermutung 2.3 bestätigen.

Satz 2.24 *Ist $G = K_{n_1, \dots, n_r}$ ein vollständig r -partiter Graph, so gilt die totalchromatische Vermutung $\chi''(G) \leq \Delta + 2$.*

Planare Graphen

Beschränkt man sich bei der Untersuchung der totalchromatischen Zahl auf planare Graphen, so ist die totalchromatische Vermutung fast vollständig bewiesen: Einzig für planare Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 6$ und Knotenzahl $p \geq 15$ steht ein Beweis noch aus.

Zunächst konnte Borodin [18] im Jahr 1989 zeigen, dass die totalchromatische Vermutung für alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 9$ gilt. Der Fall $\Delta = 8$ ist von Jensen und Toft [71] 1995 bestätigt worden, und der Fall $\Delta = 7$ folgte 1999

von Sanders und Zhao [92]; dieses letzte Ergebnis lässt sich jedoch auch mit den Beweismethoden von Jensen und Toft und Satz 2.14 über die Kantenfärbung planarer Graphen herleiten (siehe Gottschalk [49]). Gottschalk [49] bemerkte schließlich im gleichen Jahr, dass man ebenfalls mit Hilfe eines Ergebnisses der Kantenfärbung, nämlich mit dem in Kapitel 3 bewiesenen Korollar 3.3, die totalchromatische Vermutung für alle Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 6$ und kleiner Knotenzahl (inzwischen Knotenzahl $p \leq 14$) bestätigen kann. Da sie zusätzlich für alle Graphen mit Maximalgrad $\Delta \leq 5$ gilt, folgt Satz 2.25.

Satz 2.25 *Ist G ein planarer Graph der Ordnung p mit Maximalgrad Δ und gilt $\Delta \neq 6$ oder $p \leq 14$, so gilt die totalchromatische Vermutung $\chi''(G) \leq \Delta + 2$.*

Für die in Satz 2.25 noch nicht enthaltenen planaren Graphen gilt zumindest eine obere Schranke, die der totalchromatischen Vermutung schon recht nahe kommt. Dieses Ergebnis stammt von Borodin [18].

Satz 2.26 *Ist G ein planarer Graph mit Maximalgrad $\Delta = 6$, so gilt*

$$\chi''(G) \leq \Delta + 3 = 9.$$

Tabelle 6.2 in Kapitel 6 gibt noch einmal eine Übersicht über die Graphenklassen, für die die totalchromatische Vermutung bereits bestätigt ist.

2.2.3 Exakte Werte für die totalchromatische Zahl

Während im vorangegangenen Abschnitt einige Graphenklassen vorgestellt wurden, für die die totalchromatische Vermutung $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ bestätigt ist, werden nun Graphen und Graphenklassen behandelt, für die der Wert χ'' bereits genau angegeben werden kann.

Graphen mit kleinem Maximalgrad

Zunächst werden Graphen mit kleinem Maximalgrad betrachtet. Ist G ein zusammenhängender Graph mit Maximalgrad $\Delta = 1$, so gilt $G \cong K_2$ und G ist offensichtlich vom Typ 2. Gilt $\Delta = 2$, so ist G ein Weg oder ein Kreis; für diese beiden Graphenklassen kann die totalchromatische Zahl ebenfalls problemlos angegeben werden.

Satz 2.27 *Jeder Weg P_n mit $n \geq 3$ ist vom Typ 1.*

Satz 2.28 *Für einen Kreis C_p gilt*

$$\chi''(C_p) = \begin{cases} 3 & \text{falls } p \equiv 0 \pmod{3} \\ 4 & \text{falls } p \equiv 1 \text{ oder } 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Graphen mit großem Maximalgrad

Auch für Graphen mit großem Maximalgrad ist der totalchromatische Index bekannt. Der Beweis für vollständige Graphen stammt von Behzad, Chartrand und Cooper [10].

Satz 2.29 *Für einen vollständigen Graph K_p gilt*

$$\chi''(K_p) = \begin{cases} p & \text{falls } p \text{ ungerade} \\ p + 1 & \text{falls } p \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die totalchromatische Zahl vollständiger Graphen verhält sich also genau entgegengesetzt zu ihrem chromatischen Index: Während die vollständigen Graphen gerader Knotenzahl zur Klasse 1 und diejenigen ungerader Knotenzahl zur Klasse 2 gehören, sind erstere vom Typ 2 und letztere vom Typ 1.

Aus Satz 2.29 folgt unmittelbar, dass auch alle nicht vollständigen Graphen ungerader Knotenzahl p mit Maximalgrad $p - 1$ zum Typ 1 gehören, da sie Teilgraphen des vollständigen Graphen K_p sind. Nicht vollständige Graphen gerader Knotenzahl p mit Maximalgrad $p - 1$ werden im folgenden Satz von Hilton [63] behandelt. Der Beweis dieses sowie des Satzes 2.31 ist auch bei Yap [109] zu finden. Dabei wird das Komplement \overline{G} eines Graphen G benutzt, für das $V(\overline{G}) = V(G)$ und $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ und } uv \notin E(G)\}$ gilt.

Satz 2.30 *Ist G ein Graph der Ordnung $2n$ mit Maximalgrad $\Delta = 2n - 1$, so ist G genau dann vom Typ 1, wenn $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) \geq n$ gilt.*

Satz 2.31 und 2.32 schließlich behandeln Graphen der Ordnung p mit Maximalgrad $\Delta = p - 2$. Das Ergebnis für Graphen gerader Ordnung stammt von Chen und Fu [29], das für Graphen ungerader Ordnung von Yap, Chen und Fu [111].

Satz 2.31 *Ist G ein Graph mit $2n$ Knoten und Maximalgrad $\Delta = 2n - 2$, so ist G genau dann vom Typ 2, wenn $\overline{G} \cong S_{2n-2} \cup S_2$ ist, wobei S_n für $n \in \mathbb{N}$ einen Stern mit n Knoten und $n - 1$ Kanten bezeichnet.*

Satz 2.32 *Ist G ein Graph der Ordnung $2n + 1$ mit Maximalgrad $\Delta = 2n - 1$ und v ein Knoten mit Minimalgrad in G , so ist G genau dann vom Typ 1, wenn $|E(\overline{G - v})| + \alpha'(\overline{G - v}) \geq n$ gilt.*

Zum nächsten Fall $\Delta(G) = |V(G)| - 3$ gibt es bisher nur Ergebnisse für reguläre Graphen. Mit den beiden Sätzen 2.33 und 2.34 von Dugdale und Hilton [37] beziehungsweise Chetwynd und Hilton (siehe Yap [108]) ergibt sich Satz 2.46 über den totalchromatischen Index $(p - 3)$ -regulärer zirkulanter Graphen der Ordnung p .

Satz 2.33 *Ist G ein $(2n - 3)$ -regulärer Graph mit gerader Knotenzahl $2n$, $n \geq 3$, so ist G genau dann vom Typ 1, wenn \overline{G} die Vereinigung gerader Kreise ist. Für $n = 2$ ist G vom Typ 2.*

Satz 2.34 *Ist G ein $(2n - 2)$ -regulärer Graph mit ungerader Knotenzahl $2n + 1$, $n \geq 1$, so ist G genau dann vom Typ 1, wenn $K_3 \subseteq \overline{G}$ gilt.*

Bipartite Graphen

In Satz 2.35 werden vollständig bipartite Graphen bezüglich ihrer totalchromatischen Zahl untersucht. Das Ergebnis stammt von Behzad, Chartrand und Cooper [10].

Satz 2.35 *Für einen vollständig bipartiten Graph $K_{m,n}$ mit Maximalgrad Δ gilt*

$$\chi''(K_{m,n}) = \begin{cases} \Delta + 1 & \text{falls } m \neq n \\ \Delta + 2 & \text{falls } m = n. \end{cases}$$

Aus Satz 2.35 folgt unmittelbar, dass alle bipartiten Graphen G mit Knotenmenge $U \cup W$ und $|U| \neq |W|$ vom Typ 1 sind. Für balancierte bipartite Graphen — also bipartite Graphen mit $|U| = |W|$ —, die nicht vollständig bipartit sind, liefert Satz 2.35 kein Ergebnis; die beiden folgenden Sätze 2.36 von Chen, Dong, Liu und Huang [28] beziehungsweise 2.37 von Xu [106] geben jedoch weitere Charakterisierungen bipartiter Typ-1-Graphen an.

Satz 2.36 *Ist $J \subseteq K_{n,n}$ mit $n \geq 5$, so dass der Graph $G = K_{n,n} - E(J)$ ein $(n - 2)$ -regulärer Graph ist, so ist G genau dann vom Typ 1, wenn J einen Kreis C_4 enthält.*

Ein Knoten $v \in V(G)$ mit $d(v) = \Delta(G)$ sei *Maximalknoten* genannt.

Satz 2.37 *Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph, der keine benachbarten Maximalknoten enthält. Außerdem sei die Länge eines kürzesten Weges zwischen zwei Maximalknoten $u_i, u_j \in U$ beziehungsweise $w_i, w_j \in W$ immer ≥ 8 . Dann ist G vom Typ 1.*

Vollständig r -partite Graphen

Vollständig r -partite Graphen K_{n_1, \dots, n_r} erfüllen nach Satz 2.24 die totalchromatische Vermutung. Ist zudem die Knotenzahl $\sum_{i=1}^r n_i$ ungerade, so kann die totalchromatische Zahl mit dem folgenden Satz, der unabhängig voneinander von Chew und Yap [33] sowie von Hoffman und Rodger [67] bewiesen wurde, exakt angegeben werden.

Satz 2.38 *Alle vollständig r -partiten Graphen K_{n_1, \dots, n_r} mit ungerader Knotenzahl gehören zum Typ 1.*

Für vollständig r -partite Graphen mit gerader Knotenzahl gibt es bisher kein allgemeines Ergebnis; allerdings konnte Bermond [13] die totalchromatische Zahl aller balancierten vollständig r -partiten Graphen bestimmen.

Satz 2.39 *Ist $K(r, n)$ ein balancierter vollständig r -partiter Graph, so gilt*

$$\chi''(K(r, n)) = \begin{cases} \Delta + 2 & \text{falls } r = 2 \text{ oder } r \text{ gerade und } n \text{ ungerade} \\ \Delta + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nicht balancierte vollständig 3-partite oder 4-partite Graphen wurden von Chew und Yap [33] beziehungsweise von Dong und Yap [36] untersucht. Insgesamt erhält man das folgende Ergebnis.

Satz 2.40 *Jeder nicht balancierte vollständig r -partite Graph mit $2 \leq r \leq 4$ ist vom Typ 1.*

Offen ist hier also nur noch der Fall der nicht balancierten vollständig r -partiten Graphen K_{n_1, \dots, n_r} mit $r \geq 5$ und $\sum_{i=1}^r n_i$ gerade.

Zirkulante Graphen

Zirkulante Graphen $C_p(a_1, \dots, a_r)$ wurden bereits in Abschnitt 2.1.2 definiert (siehe Seite 16). Für einige dieser Graphen ist die totalchromatische Zahl bereits bekannt: 1-reguläre zirkulante Graphen $C_{2n}(n)$ zum Beispiel werden von n unabhängigen Kanten induziert und gehören somit zum Typ 2. Die Menge der 2-regulären zirkulanten Graphen $C_p(a)$ mit $a < p/2$ besteht aus Kreisen, deren totalchromatische Zahl in Satz 2.28 angegeben ist, während die Menge der zirkulanten Graphen $C_p(1, 2, \dots, \lfloor p/2 \rfloor)$ mit Maximalgrad $p - 1$ die Menge der vollständigen Graphen ist; sie sind somit genau dann vom Typ 1, wenn p ungerade ist (siehe Satz 2.29). Auch $(p - 2)$ -reguläre zirkulante Graphen $C_{2n}(1, 2, \dots, n - 1)$ sind bereits bezüglich ihrer totalchromatischen Zahl klassifiziert: Nach Satz 2.31 ist unter ihnen nur der Graph $C_4(1) \cong C_4$ vom Typ 2.

Im Folgenden wird die Klasse der zirkulanten Graphen mit Maximalgrad 3 sowie die der zirkulanten Graphen G mit Maximalgrad $|V(G)| - 3$ bezüglich ihrer totalchromatischen Zahl untersucht. Dabei sei der Index i eines Knotens v_i oder einer Kante e_i in einem zirkulanten Graph $C_p(a_1, \dots, a_r)$ immer modulo p zu verstehen, es sei denn, es wird etwas anderes angegeben.

Ist G ein zirkulanter Graph mit Maximalgrad 3, so muss $r = 2$ und $a_2 = p/2$ gelten; somit ist die Knotenzahl gerade, und G hat die Form $C_{2n}(a, n)$ mit $a \in \mathbb{N}$,

$1 \leq a < n$. Um Satz 2.44 über die Totalfärbung zirkulanter Graphen mit Maximalgrad 3 zu beweisen, sind die folgenden Eigenschaften zirkulanter Graphen hilfreich. Dabei sei ein zirkulanter Graph, wenn nicht anders angegeben, der einfacheren Beschreibung wegen immer so dargestellt, dass seine Knoten kreisförmig angeordnet sind.

Lemma 2.41 ist einem Artikel von Hattingh [61] entnommen und basiert auf Ergebnissen von Broere [24].

Lemma 2.41 *Ist für den zirkulanten Graph $G = C_p(a_1, \dots, a_r)$ die Zahl l der größte gemeinsame Teiler von a_1, \dots, a_r und p , so hat G genau l Komponenten, die alle isomorph zum Graph $C_{p/l}(a_1/l, \dots, a_r/l)$ sind.*

Beweis. Die Knoten von G seien im Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{p-1} durchnummeriert. Mit G_j sei für $j = 0, \dots, l-1$ der Teilgraph von G bezeichnet, der von den Knoten v_{il+j} mit $0 \leq i \leq p/l-1$ aufgespannt wird.

Zunächst wird gezeigt, dass G_j für jedes $j = 0, \dots, l-1$ zusammenhängend ist. Es seien v_s und v_t zwei Knoten aus G_j ; dann gilt $s - t = il$ für eine Zahl $i \in \mathbb{Z}$. Da nun $l = \text{ggT}(a_1, \dots, a_r, p)$ gilt, gibt es Zahlen $b_1, \dots, b_{r+1} \in \mathbb{Z}$ mit

$$l = b_1 a_1 + \dots + b_r a_r + b_{r+1} p.$$

Somit erhält man

$$s = t + (ib_1)a_1 + \dots + (ib_r)a_r + (ib_{r+1})p,$$

und diese Gleichung kann benutzt werden, um eine Kantenfolge von v_t zu v_s zu beschreiben.

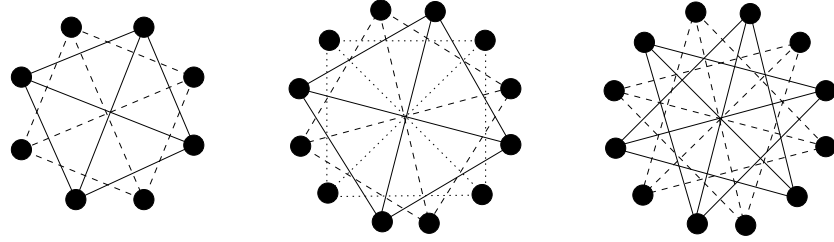
Als nächstes wird gezeigt, dass alle Kanten von G in einem der Teilgraphen G_j enthalten sind. Es sei $e = v_s v_t$ eine beliebige Kante in G ; dann gilt $s - t \equiv \pm a_i \pmod{p}$ für ein $i = 1, \dots, r$. Da jedoch $l \mid a_i$ und $l \mid p$ gilt und somit $s \equiv t \pmod{l}$ ist, liegen die Knoten v_s und v_t beide im gleichen Teilgraph G_j , und die Kante e ist somit in G_j enthalten.

Also besteht G aus genau l Komponenten, die den oben definierten l Teilgraphen G_j entsprechen. Es sei nun für einen beliebigen dieser Teilgraphen die Bijektion

$$f : V(G_j) \rightarrow V(C_{p/l}(a_1/l, \dots, a_r/l)) = \{w_0, \dots, w_{p/l-1}\}$$

definiert durch $f(v_{il+j}) = w_i$. Da zwei Knoten $v_{i_1 l+j}$ und $v_{i_2 l+j}$ in G genau dann benachbart sind, wenn $(i_1 l+j) - (i_2 l+j) \equiv \pm a_m \pmod{p}$ für ein $m \in \{1, \dots, r\}$ gilt und somit $i_1 - i_2 \equiv \pm a_m/l \pmod{p}$ ist, also w_{i_1} und w_{i_2} in $C_{p/l}(a_1/l, \dots, a_r/l)$ benachbart sind, ist f adjazenzerhaltend. Also gilt $G \cong l C_{p/l}(a_1/l, \dots, a_r/l)$. \square

Als Beispiel für Lemma 2.41 sind in Abbildung 2.2 drei nicht zusammenhängende zirkulante Graphen mit Maximalgrad 3 dargestellt. Die Komponenten der Graphen sind dabei jeweils durch unterschiedliche Stricharten gekennzeichnet.



$$C_8(2, 4) \cong 2C_4(1, 2) \quad C_{12}(3, 6) \cong 3C_4(1, 2) \quad C_{12}(4, 6) \cong 2C_6(2, 3)$$

Abbildung 2.2: Nicht zusammenhängende, 3-reguläre zirkulante Graphen.

In Lemma 2.42 wird eine Methode zur Untersuchung der Isomorphie zirkulanter Graphen entwickelt (siehe auch Ádám [1]).

Lemma 2.42 Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv m \pmod{p}$, $m \in \mathbb{Z}_p$, sei $(n)_p$ folgendermaßen definiert:

$$(n)_p = \begin{cases} m & \text{falls } m \leq p/2 \\ p - m & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(b, p) = 1$ eine zu p teilerfremde Zahl. Dann gilt: $C_p(a_1, \dots, a_r) \cong C_p((a_1 b)_p, \dots, (a_r b)_p)$.

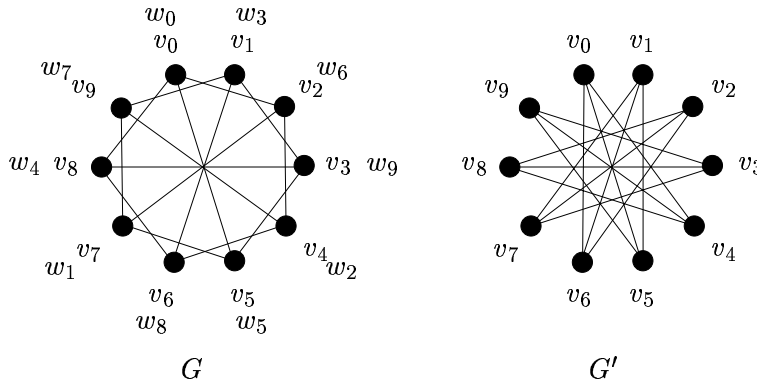
Beweis. Es seien $G = C_p(a_1, \dots, a_r)$ und $G' = C_p((a_1 b)_p, \dots, (a_r b)_p)$. Die Knoten von G und G' seien jeweils im Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{p-1} durchnummeriert. Sind v_i, v_j zwei beliebige adjazente Knoten in G , so gilt $i - j \equiv \pm a_t \pmod{p}$ für ein t mit $1 \leq t \leq r$ und damit auch $bi - bj \equiv \pm a_t b \equiv \pm (a_t b)_p \pmod{p}$, das heißt, die Knoten v_{bi}, v_{bj} sind in G' adjazent. Werden nun die Knoten von G umbenannt durch $v_k = w_{bk}$ für $k = 0, \dots, p-1$, so ist $f : V(G) \rightarrow V(G')$ mit $f(w_k) = v_k$ für $k = 0, \dots, p-1$ eine adjazenzerhaltende, bijektive Abbildung und die Graphen G und G' sind isomorph. \square

In Abbildung 2.3 ist ein Beispiel für $C_{10}(2, 5) \cong C_{10}((2 \cdot 3)_{10}, (5 \cdot 3)_{10}) = C_{10}(4, 5)$ angegeben.

Lemma 2.43 beschreibt die Struktur 3-regulärer zirkulanter Graphen. Diese Struktur wird auch in einer kürzlich unabhängig erschienenen Arbeit von Davis und Domke [34] mit einem anderen Ansatz bestimmt.

Lemma 2.43 Es sei $C_{2n}(a, n)$ ein 3-regulärer zirkulanter Graph mit $\text{ggT}(a, n) = l$, $1 \leq l \leq a$. Ist $a = lk$ und $n = lm$, so gilt

$$C_{2n}(a, n) \cong \begin{cases} lC_{2m}(1, m) & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ lC_{2m}(2, m) & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$


 Abbildung 2.3: $C_{10}(2, 5)$ ist isomorph zu $C_{10}(4, 5)$.

Beweis. Nach Lemma 2.41 gilt $C_{2n}(a, n) \cong lC_{2m}(k, m)$. Ist k ungerade, so folgt aus Lemma 2.42 wegen $\text{ggT}(k, 2m) = 1$ und $k < m$ unmittelbar

$$C_{2m}(1, m) \cong C_{2m}(k, (km)_{2m}) = C_{2m}(k, m).$$

Ist k gerade, so ist m ungerade. Es sei $k = 2^t s$ mit $s, t \in \mathbb{N}$ und s ungerade. Dann gilt $\text{ggT}(s, 2m) = 1$, also

$$C_{2m}(2^t, m) \cong C_{2m}((2^t s)_{2m}, m) \cong C_{2m}(k, m).$$

Gilt $t = 1$, so ist die Behauptung damit bewiesen. Ist hingegen $t > 1$, so sei $x = m + 2^{t-1}$; da m und somit auch x ungerade ist, gilt nun wiederum $\text{ggT}(x, 2m) = 1$, und es folgt

$$C_{2m}(2, m) \cong C_{2m}((2x)_{2m}, m) \cong C_{2m}((2m + 2^t)_{2m}, m) \cong C_{2m}(2^t, m).$$

Also ergibt sich $C_{2m}(k, m) \cong C_{2m}(2, m)$, womit der Satz bewiesen ist. \square

Mit den vorangegangenen Lemmata lässt sich nun die totalchromatische Zahl aller zirkulanten Graphen mit Maximalgrad 3 ermitteln.

Satz 2.44 *Es sei $C_{2n}(a, n)$ mit $a \in \mathbb{N}$, $1 \leq a < n$ ein zirkulanter Graph mit Maximalgrad 3; dabei gelte $\text{ggT}(a, n) = l$, $a = lk$ und $n = lm$. Dann ist $C_{2n}(a, n)$ genau dann vom Typ 1, wenn k gerade und der Graph nicht isomorph zum Graph $lC_{10}(2, 5)$ ist. In allen anderen Fällen ist $C_{2n}(a, n)$ vom Typ 2.*

Beweis. Nach Lemma 2.43 sind zwei Fälle zu unterscheiden: Ist k ungerade, so gilt $C_{2n}(a, n) \cong lC_{2m}(1, m)$; ist k gerade, so gilt $C_{2n}(a, n) \cong lC_{2m}(2, m)$. Da die totalchromatische Zahl eines nicht zusammenhängenden Graphen gleich dem Maximum der totalchromatischen Zahlen seiner Komponenten ist, muss nur der Fall $l = 1$ betrachtet werden. Es sind also zwei Arten zirkulanten Graphen zu

untersuchen: Die Graphen $C_{2m}(1, m)$ und die Graphen $C_{2m}(2, m)$. Alle Graphen $C_{2m}(1, m)$ mit $2 \leq m \leq 5$ sind in Abbildung 2.4 dargestellt; Abbildung 2.5 zeigt jeweils zwei Darstellungen aller zusammenhängenden Graphen $C_{2m}(2, m)$ mit $3 \leq m \leq 7$. An der jeweils unteren Darstellung lässt sich die Struktur dieser Graphen besonders gut erkennen: Sie bestehen aus zwei Kreisen C_m , bei denen sich entsprechende Knoten durch eine zusätzliche Kante verbunden sind.

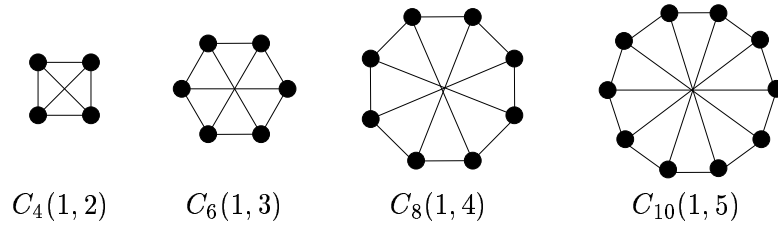


Abbildung 2.4: Alle Graphen $C_{2m}(1, m)$ mit $2 \leq m \leq 5$.

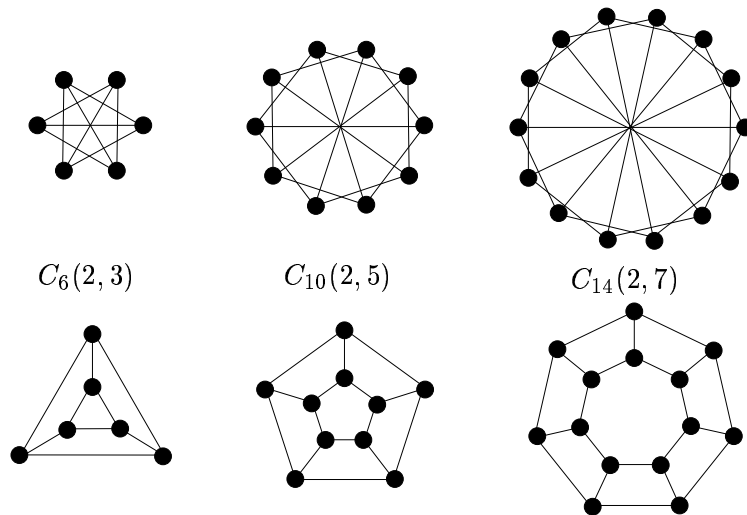


Abbildung 2.5: Je 2 Darstellungen aller zusammenhängenden Graphen $C_{2m}(2, m)$ mit $3 \leq m \leq 7$.

Es wird nun gezeigt, dass alle Graphen $C_{2m}(1, m)$ sowie der Graph $C_{10}(2, 5)$ vom Typ 2 und alle zusammenhängenden Graphen $C_{2m}(2, m)$ mit Ausnahme von Graph $C_{10}(2, 5)$ vom Typ 1 sind.

Zunächst sei $G = C_{2m}(1, m)$ mit $m \geq 2$; der Graph besteht aus einem Kreis C_{2m} und m unabhängigen Kanten, den Speichen des Graphen. Die Knoten seien im Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{2m-1} benannt. Wird im Folgenden eine Speiche $v_i v_{i+m}$ betrachtet, so ist mit dem *vorangehenden Knoten auf dem Kreis* C_{2m} in

Bezug auf diese Speiche der Knoten v_{i-1} gemeint, während die *vorletzte Kante auf* C_{2m} die Kante $v_{i-2}v_{i-1}$ bezeichnen soll. Die *vorige Speiche* ist dann die Speiche $v_{i-1}v_{i-1+m}$.

Angenommen, G habe eine 4-Totalfärbung c mit den Farben $0, \dots, 3$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei 0 die Farbe von v_1 , 1 die Farbe von v_1v_0 und 2 die Farbe von v_1v_2 . Die Speiche v_1v_{1+m} muss dann mit der Farbe 3 gefärbt sein. In Abhängigkeit von diesen festgelegten Farben gibt es nun genau drei unterschiedliche Möglichkeiten, welche Farbe die auf v_1v_{1+m} folgende Speiche v_2v_{2+m} besitzt:

- a) $c(v_2v_{2+m}) = c(v_1v_{1+m}) = 3$, das heißt, die Speiche hat die gleiche Farbe wie die vorige Speiche. In diesem Fall muss v_2 mit der Farbe 1 und v_2v_3 mit der Farbe 0 gefärbt sein. Des Weiteren ergibt sich $c(v_{1+m}) \in \{1, 2\}$ und $c(v_{2+m}) \in \{0, 2\}$, und für die Kanten $v_{1+m}v_{2+m}$, v_mv_{1+m} und $v_{2+m}v_{3+m}$ sind jeweils noch die Farben 0, 1 und 2 möglich (siehe Abbildung 2.6, Fall a)).

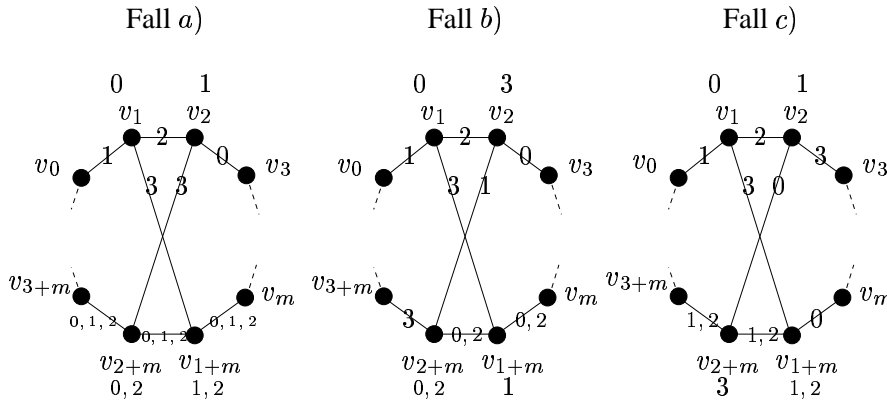


Abbildung 2.6: Die drei möglichen Farbgebungskombinationen.

Für die anschließenden Überlegungen ist noch die folgende Besonderheit wichtig: Steht bereits fest, dass die Kante $v_{1+m}v_{2+m}$ die Farbe 0 erhält, also die auf den Knoten v_{1+m} folgende Kante mit der gleichen Farbe wie der Knoten v_1 gefärbt ist, so folgt $c(v_{2+m}) = 2$ und damit $c(v_{2+m}v_{3+m}) = 1$; also ist in diesem Fall auch die auf den Knoten v_{2+m} folgende Kante genauso gefärbt wie der Knoten v_2 .

- b) $c(v_2v_{2+m}) = c(v_0v_1) = 1$, das heißt, die Speiche hat die gleiche Farbe wie die vorletzte Kante auf dem Kreis C_{2m} . Dann muss v_2 die Farbe 3 und v_2v_3 die Farbe 0 besitzen. Da außerdem sowohl für v_{2+m} als auch für $v_{1+m}v_{2+m}$ nur noch die Farben 0 und 2 möglich sind, eines dieser beiden Elemente also mit 2 gefärbt sein muss, bleibt für v_{1+m} nur noch die Farbe 1. Für $v_{2+m}v_{3+m}$ ergibt sich die Farbe 3, und v_mv_{1+m} muss entweder mit 0 oder mit 2 gefärbt sein (siehe Abbildung 2.6, Fall b)).

- c) $c(v_2v_{2+m}) = c(v_1) = 0$, das heißt, die Speiche hat die gleiche Farbe wie der vorangehende Knoten auf dem Kreis C_{2m} . In diesem Fall sind für den Knoten v_2 ebenso wie für die Kante v_2v_3 zunächst noch die beiden Farben 1 und 3 möglich. Wäre jedoch v_2 mit 3 und v_2v_3 mit 1 gefärbt, so müssten sowohl die Knoten v_{1+m} und v_{2+m} als auch die Kante $v_{1+m}v_{2+m}$ mit einer der beiden Farben 1 und 2 gefärbt sein, was nicht möglich ist. Also gilt $c(v_2) = 1$ und $c(v_2v_3) = 3$. Da eines der beiden Elemente v_{1+m} und $v_{1+m}v_{2+m}$ die Farbe 2 haben muss, bleibt für v_{2+m} nur noch die Farbe 3. Für v_mv_{1+m} ergibt sich die Farbe 0, und $v_{2+m}v_{3+m}$ muss entweder mit 1 oder mit 2 gefärbt sein (siehe Abbildung 2.6, Fall c)).

Angenommen, in der 4-Totalfärbung von G tritt nur Fall a) auf, das heißt, für jeden Knoten v_i gilt $c(v_{i+1}v_{i+1+m}) = c(v_iv_{i+m})$. Dann haben alle Speichen von G die selbe Farbe und der äußere C_{2m} des Graphen ist 3-totalgefärbt, was nur für $2m \equiv 0 \pmod{3}$ möglich ist. Ist $2m$ jedoch durch 3 teilbar und färbt man den C_{2m} mit drei Farben, so erhalten die in G benachbarten Knoten v_i und v_{i+m} für jedes $i = 0, \dots, 2m - 1$ die gleichen Farben, was nicht zulässig ist. Also muss mindestens einer der Fälle b) oder c) in der Färbung von G auftreten.

Angenommen, Fall b) tritt in der 4-Totalfärbung auf, es gibt also einen Knoten $v_i \in V(G)$, so dass die zu v_{i+1} inzidente Speiche $v_{i+1}v_{i+1+m}$ die gleiche Farbe wie die Kante $v_{i-1}v_i$ hat. Nach Abbildung 2.6, Fall b) — dort ist $i = 1$ — gilt in diesem Fall immer $c(v_{i+1+m}v_{i+2+m}) = c(v_{i+1})$. Würde nun auf Fall b) der Fall c) folgen, die nächste Speiche $v_{i+2}v_{i+2+m}$ also genauso wie der vorangehende Knoten v_{i+1} gefärbt werden, so erhielte diese Speiche somit die gleiche Farbe wie die benachbarte Kante $v_{i+1+m}v_{i+2+m}$, was nicht zulässig ist. Also können für drei aufeinanderfolgende Speichen nicht die zweite nach Fall b) und die dritte nach Fall c) gefärbt werden. Angenommen, auf den Fall b) folgt ein Fall a). Da $c(v_{i+1+m}v_{i+2+m}) = c(v_{i+1})$ gilt, also die auf den Knoten v_{i+1+m} folgende Kante die gleiche Farbe wie der Knoten v_{i+1} hat, ergibt sich — wie in der obigen Fallunterscheidung unter Fall a) erläutert — $c(v_{i+2+m}v_{i+3+m}) = c(v_{i+2})$; somit kann die nächste Speiche $v_{i+3}v_{i+3+m}$ wieder nicht nach Fall c) gefärbt werden. Also gilt: Da Fall b) auftritt, kann keine Speiche nach Fall c) gefärbt werden. Andererseits gilt jedoch in Fall b) immer $c(v_{i+1}v_{i+1+m}) = c(v_{i+m})$ (siehe Abbildung 2.6, Fall b)), es ist also die zum Knoten v_{i+1+m} inzidente Speiche mit der gleichen Farbe wie der vorangehende Knoten v_{i+m} und somit nach Fall c) gefärbt, woraus sich ein Widerspruch ergibt.

Somit tritt Fall b) in der 4-Totalfärbung nicht auf, und da wie bereits gezeigt nicht alle Speichen nach Fall a) gefärbt sein können, muss Fall c) auftreten. Es gibt also einen Knoten $v_i \in V(G)$ mit $c(v_{i+1}v_{i+1+m}) = c(v_i)$. Dann gilt jedoch nach Abbildung 2.6, Fall c) auch $c(v_{i+1}v_{i+1+m}) = c(v_{i-1+m}v_{i+m})$; somit hat die zum Knoten v_{i+1+m} inzidente Speiche die gleiche Farbe wie die vorletzte Kante auf dem Kreis C_{2m} und ist daher nach Fall b) gefärbt, was wiederum zum Widerspruch führt. Somit ist der Graph G nicht 4-totalfärbbar.

Dass $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2 = 5$ gilt, folgt aus Satz 2.20. Eine 5-Totalfärbung kann wie folgt angegeben werden: Zunächst erhalten die m unabhängigen Kanten $v_i v_{i+m}$ die Farbe 4. Ist m ungerade, so können die Elemente des äußeren C_{2m} im Uhrzeigersinn abwechselnd mit den Farben $0, 1, 2, 3, 0, \dots$ gefärbt werden und man erhält eine 5-Totalfärbung von G . Ist m gerade, so färbt man nur die Elemente $v_1, v_1 v_2, \dots, v_m$ und $v_m v_{m+1}$ in der oben beschriebenen Weise und fährt bei den übrigen Elementen mit der Farbfolge $1, 0, 3, 2, 1, \dots, 2$ fort. Damit ist sichergestellt, dass zwei Knoten v_i und v_{i+m} unterschiedliche Farben erhalten, und der Graph ist zulässig gefärbt (als Beispiel sind in Abbildung 2.7 jeweils 5-Totalfärbungen der Graphen $C_6(1, 3)$ und $C_8(1, 4)$ angegeben).

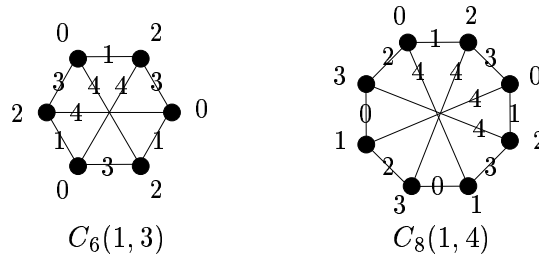


Abbildung 2.7: 5-Totalfärbung von $C_6(1, 3)$ und $C_8(1, 4)$.

Die Graphen $C_{2m}(1, m)$ sind somit alle vom Typ 2.

Nun sei $G = C_{10}(2, 5)$ der Graph, der aus zwei Kreisen C_5 mit den Knotenmengen $\{v_1, \dots, v_5\}$ und $\{w_1, \dots, w_5\}$ besteht, bei denen die sich entsprechenden Knoten v_i und w_i jeweils durch eine Speiche $v_i w_i$ verbunden sind. Die Kanten $v_i v_{i+1}$ beziehungsweise $w_i w_{i+1}$ seien mit e_i beziehungsweise e'_i benannt.

Angenommen, G habe eine 4-Totalfärbung c mit der Eigenschaft, dass keine zwei Kanten e_i, e_{i+2} oder e'_i, e'_{i+2} die gleiche Farbe erhalten. Dann müsste der Graph G' , der entsteht, wenn man in den Totalgraph $T(C_5)$ eines 5-Kreises mit der Knotenmenge $V(G') = \{v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_5, e_5\}$ zusätzlich die Kanten $e_i e_{i+2}$ für $i = 1, \dots, 5$ einfügt, 4-knotenfärbbar sein. Der Graph enthält jedoch einen K_5 als Teilgraph (siehe Abbildung 2.8) und ist somit nicht 4-knotenfärbbar.

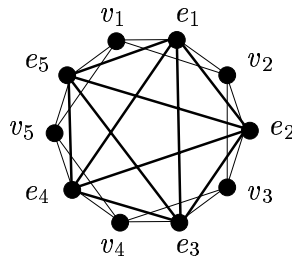


Abbildung 2.8: $K_5 \subseteq G'$.

Damit gilt: In jeder 4-Totalfärbung von G gibt es zwei Kanten e_i, e_{i+2} oder e'_j, e'_{j+2} mit gleicher Farbe. Ohne Einschränkung seien e_1 und e_3 beide mit 0 gefärbt. Die Farben von v_2 und e_2 seien 1 beziehungsweise 2. Dann müssen sowohl der Knoten v_3 als auch die Kante v_2w_2 die letzte noch verbleibende Farbe 3 besitzen, und v_3w_3 ist mit Farbe 1 gefärbt (siehe Abbildung 2.9). Somit bleiben für die drei Elemente w_2, w_3 und $e'_2 = w_2w_3$ jeweils nur die beiden Farben 0 und 2 übrig, was nicht möglich ist. Also ist $C_{10}(2, 5)$ nicht 4-totalfärbbar.

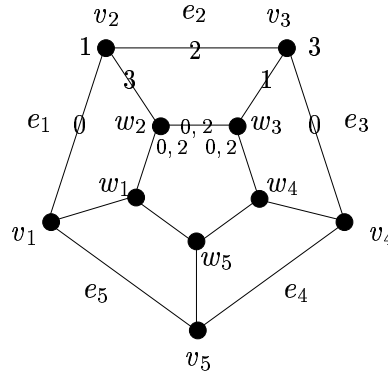


Abbildung 2.9: $C_{10}(2, 5)$ hat keine 4-Totalfärbung c mit $c(e_1) = c(e_3)$.

$\chi''(C_{10}(2, 5)) \leq 5$ folgt wiederum aus Satz 2.20. Eine 5-Totalfärbung kann wie folgt angegeben werden: Man färbe die Knoten und Kanten $v_1, e_1, v_2, \dots, e_4, v_5$ im Uhrzeigersinn abwechselnd mit den Farben $0, \dots, 2$ und die Kante e_5 mit der Farbe 3. Bei den Knoten und Kanten des anderen 5-Kreises verfähre man ebenso, jedoch beim Knoten w_2 beginnend. Die verbleibenden Kanten werden mit der Farbe 4 gefärbt. Somit ist gezeigt, dass $C_{10}(2, 5)$ vom Typ 2 ist.

Es sei schließlich G ein zusammenhängender Graph der Form $C_{2m}(2, m)$ mit $m \neq 5$; da G zusammenhängend ist, muss m ungerade sein. In den folgenden drei Fällen wird jeweils gezeigt, dass G eine 4-Totalfärbung besitzt und somit zu Typ 1 gehört. Dabei sei G in jedem der drei Fälle aus zwei Kreisen C_1 und C_2 bestehend dargestellt, deren Knoten im Uhrzeigersinn mit v_1, \dots, v_m beziehungsweise w_1, \dots, w_m durchnummeriert sind und die durch die Speichen v_iw_i für $i = 1, \dots, m$ miteinander verbunden werden.

1. $m \equiv 0 \pmod{3}$: Es sei $m = 3s$ mit ungeradem s . Eine 4-Totalfärbung von G kann wie folgt angegeben werden: Man färbt zunächst die Elemente von C_1 bei v_1 beginnend im Uhrzeigersinn abwechselnd mit den Farben $0, 1, 2, 0, 1, \dots, 2$. Da die Ordnung des Kreises durch 3 teilbar ist, ist diese Färbung möglich. In C_2 färbt man genauso, beginnt jedoch bei der Kante w_1w_2 . Die verbleibenden Kanten v_iw_i können nun alle mit der Farbe 3 gefärbt werden. Als Beispiel für eine 4-Totalfärbung eines Graphen

rechtes Bild eine Färbung des Graphen kleinster Ordnung, $C_{22}(2, 11)$, angeben.

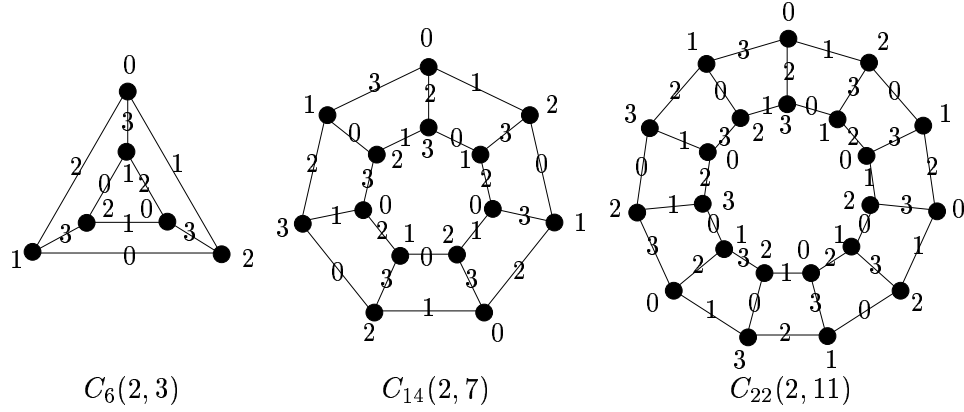


Abbildung 2.11: 4-Totalfärbungen von $C_6(2, 3)$, $C_{14}(2, 7)$ und $C_{22}(2, 11)$.

Somit sind die Graphen $C_{2m}(2, m)$ mit Ausnahme des Graphen $C_{10}(2, 5)$ alle vom Typ 1, und der Satz ist bewiesen. \square

Ist G nun ein zirkulanter Graph mit Maximalgrad $|V(G)| - 3$, so sind in der Distanzmenge $\{a_1, \dots, a_r\}$ mit Ausnahme einer Zahl a alle Zahlen $1, \dots, \lfloor p/2 \rfloor$ enthalten; dabei gilt $1 \leq a < p/2$. Das folgende Lemma beschreibt die Struktur solcher Graphen.

Lemma 2.45 *Es sei G ein $(p - 3)$ -regulärer zirkulanter Graph der Ordnung p , dessen Distanzmenge die Menge $\{1, \dots, \lfloor p/2 \rfloor\} \setminus \{a\}$ ist; dabei sei $\text{ggT}(p, a) = l$ mit $p = lm$ und $a = lk$. Dann gilt $m \geq 3$ und*

$$G \cong \overline{C_p(a)} \cong \overline{lC_m}.$$

Beweis. Wegen $a = lk < p/2 = lm/2$ und $k \geq 1$ gilt $m \geq 3$. Da der Graph $C_p(1, \dots, \lfloor p/2 \rfloor)$ isomorph zum vollständigen Graph K_p ist, gilt $G \cong \overline{C_p(a)}$. Mit Lemma 2.41 ergibt sich somit $G \cong \overline{lC_m(k)}$. Da $\text{ggT}(m, k) = 1$ gilt, bilden die Knoten $v_0, v_k, v_{2k}, \dots, v_{m-k}$ des Graphen $C_m(k)$ einen hamiltonschen Kreis C_m ; damit folgt $G \cong \overline{lC_m}$. \square

Demnach besteht das Komplement \overline{G} von G aus l Kreisen der Ordnung m . Mit den Sätzen 2.33 und 2.34 ergibt sich nun die totalchromatische Zahl aller $(p - 3)$ -regulären zirkulanten Graphen.

Satz 2.46 *Ist $G \cong \overline{C_p(a)}$ ein $(p - 3)$ -regulärer zirkulanter Graph mit $\text{ggT}(p, a) = l$ und $p = lm$, $a = lk$, so ist G genau dann vom Typ 1, wenn m gerade ist oder $m = 3$ gilt und l ungerade ist. In allen anderen Fällen ist G vom Typ 2.*

Beweis. Zunächst sei p gerade. Nach Lemma 2.45 gilt $m \geq 3$ und $\overline{G} \cong lC_m$; Satz 2.33 von Dugdale und Hilton besagt somit, dass G genau dann vom Typ 1 ist, wenn m gerade ist.

Nun sei p ungerade; dann muss auch l ungerade sein. Nach Lemma 2.45 gilt $\overline{G} \cong lC_m$; also enthält \overline{G} genau dann einen K_3 als Teilgraph, wenn $m = 3$ gilt. Nach Satz 2.34 gehört G somit genau für $m = 3$ zu Typ 1. \square

Definiert man die *Summe* $G + H$ zweier Graphen G und H durch

$$\begin{aligned} V(G + H) &= V(G) \cup V(H) \text{ und} \\ E(G + H) &= E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ und } v \in V(H)\}, \end{aligned}$$

so kann man die Aussage von Lemma 2.45 erweitern auf

$$G \cong \overline{lC_m} \cong \underbrace{\overline{C_m} + \dots + \overline{C_m}}_{l \text{ Summanden}}.$$

Hiermit lässt sich ein weiteres Ergebnis beweisen.

Satz 2.47 *Ist G ein $(p - m)$ -regulärer zirkulanter Graph $\overline{C_p(a_1, \dots, a_{\lfloor m/2 \rfloor})}$ mit $\text{ggT}(p, a_1, \dots, a_{\lfloor m/2 \rfloor}) = l$ und $a_i = lk_i$ für $i = 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor$, der die Eigenschaft hat, dass $p = lm$ ist, so gilt*

$$\chi''(G) = \begin{cases} p - m + 2 & \text{falls } l = 2 \text{ oder } l \text{ gerade und } m \text{ ungerade} \\ p - m + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Nach Lemma 2.45 gilt

$$G \cong \overline{lC_m(k_1, \dots, k_{\lfloor m/2 \rfloor})},$$

also $k_i = i$; mit den auf Lemma 2.45 folgenden Überlegungen ergibt sich somit

$$G \cong \overline{lK_m} \cong \underbrace{\overline{K_m} + \dots + \overline{K_m}}_{l \text{ Summanden}} \cong \underbrace{N_m + \dots + N_m}_{l \text{ Summanden}} \cong K(l, m).$$

Die totalchromatische Zahl balancierter vollständig multipartiter Graphen ist bereits in Satz 2.39 angegeben; demnach ist G genau dann vom Typ 2, wenn $l = 2$ gilt oder l gerade und m ungerade ist. \square

Planare Graphen

Wie in Abschnitt 2.2.2 dargestellt, konnte die totalchromatische Vermutung bisher für fast alle planaren Graphen bewiesen werden. Für viele dieser Graphen G gilt jedoch sogar $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$. Dies konnte 1989 von Borodin [18] für alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 14$ gezeigt werden; 1997 wurde dieses Ergebnis von Borodin, Kostochka und Woodall zunächst auf $\Delta \geq 12$ und schließlich auf $\Delta \geq 11$ erweitert [19, 20].

Satz 2.48 *Alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 11$ sind vom Typ 1.*

Setzt man zusätzlich zur Planarität eines Graphen G analog zu Satz 2.15 auch einen Mindestwert für die Tailleweite $g(G)$ voraus, so erhält man noch weitere Aussagen über den Wert $\chi''(G)$. Satz 2.49 stammt ebenfalls von Borodin, Kostochka und Woodall [19, 21].

Satz 2.49 *Ist G ein planarer Graph mit Maximalgrad Δ und Tailleweite g , so gilt*

$$\chi''(G) = \Delta + 1 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \Delta \geq 7 & \text{und} & g \geq 4 \\ \Delta \geq 5 & \text{und} & g \geq 5 \\ \Delta \geq 4 & \text{und} & g \geq 6 \\ \Delta \geq 3 & \text{und} & g \geq 10. \end{cases}$$

Für die schon in Abschnitt 2.1.2 definierten outerplanaren Graphen ist die totalchromatische Zahl vollständig bestimmt: Ein zusammenhängender outerplanarer Graph G mit Maximalgrad $\Delta \leq 2$ ist ein Weg oder ein Kreis und somit bereits bezüglich der totalchromatischen Zahl charakterisiert; gilt $\Delta \geq 3$, so ist G nach einem Ergebnis von Zhang, Zhang und Wang [112] vom Typ 1.

Satz 2.50 *Ist G ein outerplanarer Graph, so gilt*

$$\chi''(G) = \begin{cases} \Delta(G) + 2 & \text{falls } G \cong P_2 \text{ oder } G \cong C_{3k+i} \text{ mit } i \in \{1, 2\} \\ \Delta(G) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch in der Totalfärbung scheint es mehr Typ-2-Graphen als Typ-1-Graphen zu geben. Über die Struktur kritischer Graphen der Totalfärbung, die analog zu den in Kapitel 3 behandelten kritischen Graphen der Kantenfärbung definiert werden, ist noch wenig bekannt; alle totalkritischen Graphen mit bis zu 10 Knoten beziehungsweise mit bis zu 16 Knoten und Maximalgrad 3 sind bei Hamilton, Hilton und Hind [60] beziehungsweise bei Hamilton und Hilton [59] zu finden. In Abschnitt 4.2.3 sind im Zusammenhang mit Kreistotalfärbung alle Typ-2-Graphen der Ordnung $p \leq 7$ dargestellt (Abbildungen 4.14 und 4.15).

In Kapitel 6 sind die Graphenklassen, für deren Graphen G die Werte $\chi'(G)$ beziehungsweise $\chi''(G)$ bereits bekannt sind, in den Tabellen 6.2 beziehungsweise 6.3 noch einmal zusammengestellt.

Kapitel 3

Planare kritische Graphen der Kantenfärbung mit $p \leq 12$ Knoten

Das Bestreben, alle Graphen G bezüglich ihres chromatischen Index in Graphen der Klasse 1 mit $\chi'(G) = \Delta(G)$ und Graphen der Klasse 2 mit $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ zu klassifizieren, sowie die bereits in Kapitel 2 erwähnte Tatsache, dass es verhältnismäßig wenige Graphen der Klasse 2 gibt, führt zu dem Versuch, Klasse-2-Graphen näher zu charakterisieren. Hilfreich ist dabei die Definition so genannter kritischer Graphen der Kantenfärbung, die eine Teilmenge der Klasse-2-Graphen darstellen und auf die sich alle Klasse-2-Graphen zurückführen lassen. In diesem Kapitel werden einige Eigenschaften kritischer Graphen beschrieben; speziell geht es um die Konstruktion und die Darstellung aller planaren kritischen Graphen mit bis zu 12 Knoten. Die folgenden Ergebnisse sind auch bei Hackmann [53] nachzulesen.

3.1 Eigenschaften kritischer Graphen

Definition 3.1 Ein Graph G mit Maximalgrad Δ heißt kritisch in Bezug auf Kantenfärbung, wenn G zur Klasse 2 gehört und sich durch Entfernen einer beliebigen Kante von G der chromatische Index verringert, also wenn gilt

$$\chi'(G) = \Delta + 1 \quad \text{und} \quad \chi'(G - e) = \Delta \quad \text{für alle } e \in E(G).$$

Kritische Graphen sind somit Klasse-2-Graphen, die „fast“ noch zur Klasse 1 gehören. Durch ihre spezielle Struktur lassen sie sich leichter untersuchen als allgemeine Klasse-2-Graphen. Zum Beispiel sind alle kritischen Graphen 2-zusammenhängend, eine Eigenschaft, die in Abschnitt 3.2 mehrfach benutzt wird.

Bemerkung 3.1 *Jeder kritische Graph ist 2-zusammenhängend: Hätte ein kritischer Graph G eine Artikulation v mit $d(v) = k$, so würde G bei Fortnahme von v in k Komponenten H_1, \dots, H_k zerfallen. Da G kritisch ist, lassen sich die von den Knoten $V(H_i) \cup v$ induzierten Teilgraphen von G für $i = 1, \dots, k$ mit jeweils $\Delta(G)$ Farben kantenfärben. Wählt man diese Färbungen so, dass die zu v inzidenten Kanten unterschiedliche Farben erhalten, ergibt sich eine $\Delta(G)$ -Kantenfärbung von G , im Widerspruch zu $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.*

Dass sich Erkenntnisse über kritische Graphen oft auch für Aussagen über alle Graphen G mit $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ verwenden lassen, liegt daran, dass jeder Klasse-2-Graph einen kritischen Teilgraph gleichen Maximalgrades enthält. Dieses Ergebnis stammt von Vizing [101].

Satz 3.1 *G sei ein Klasse-2-Graph mit Maximalgrad $\Delta(G) = \Delta$. Dann enthält G für jedes k mit $2 \leq k \leq \Delta$ einen kritischen Teilgraph H mit Maximalgrad $\Delta(H) = k$.*

Im Folgenden wird von Satz 3.1 meist nur der Fall $k = \Delta$ benötigt.

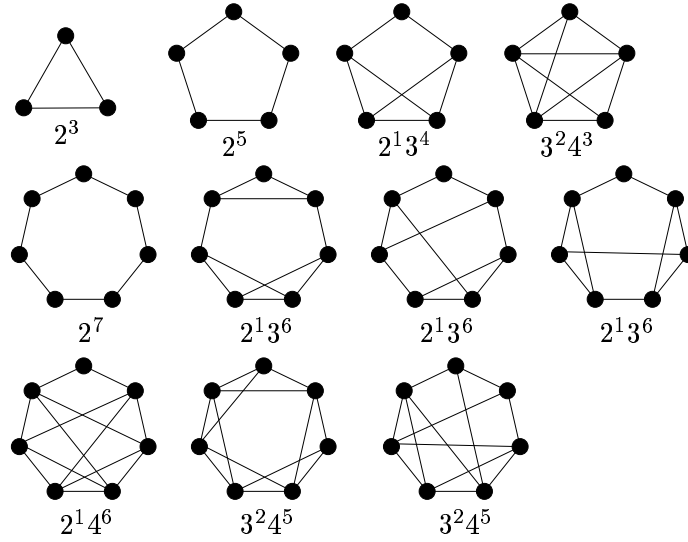
Die Konstruktion kritischer Graphen kleiner Ordnung wird in einer Vielzahl von Artikeln behandelt. Zum Beispiel konstruierte Jakobsen [69] im Jahr 1973 alle kritischen Graphen mit Maximalgrad 3 und Ordnung $p \leq 10$. Darstellungen aller kritischen Graphen mit bis zu 7 Knoten finden sich unter anderem bei Fiorini und Wilson [44].

Schließlich konnten Chetwynd und Yap [31] 1983 eine Menge von *Knotengradfolgen* mit der Eigenschaft angeben, dass ein 2-zusammenhängender Graph der Ordnung 9 mit Maximalgrad $\Delta \geq 4$ genau dann kritisch ist, wenn er einer der Gradfolgen genügt (mit Ausnahme eines einzelnen Graphen). Die *Knotengradfolge* $a_1^{c_1}, \dots, a_k^{c_k}$ eines Graphen G gibt dabei die an den Knoten von G auftretenden Knotengrade an: Der Graph hat genau c_i Knoten vom Grad a_i , für $i = 1, \dots, k$.

Abbildung 3.1 zeigt alle planaren kritischen Graphen der Ordnung $p \leq 7$ mit den dazugehörigen Knotengradfolgen.

Unabhängig voneinander formulierten Jakobsen [69] und Beineke und Wilson [11] im Jahr 1973 die so genannte *Critical Graph Conjecture*, nämlich die Vermutung, dass kritische Graphen immer eine ungerade Anzahl von Knoten besitzen. Die Vermutung wurde mehrere Jahre lang für wahr gehalten und von Fiorini und Wilson [44] für alle Graphen der Ordnung $p \leq 10$ nachgewiesen; doch Goldberg [48] gelang es 1981 schließlich, einen kritischen Graph mit 22 Knoten zu konstruieren.

Der kleinste heute bekannte kritische Graph gerader Ordnung hat 18 Knoten. Hoffman, Mitchem und Schmeichel [66] bemerkten jedoch, dass alle bisher bekannten kritischen Graphen gerader Ordnung nicht planar sind, und stellten daher eine schwächere Form der Critical Graph Conjecture auf:


 Abbildung 3.1: Alle planaren kritischen Graphen mit $p \leq 7$ Knoten.

Vermutung 3.1 (Weak Critical Graph Conjecture)

Alle planaren kritischen Graphen haben ungerade Knotenzahl.

Diese Vermutung ist bisher für alle Graphen der Ordnung $p \leq 14$ bewiesen worden. Dabei spielen überfüllte Graphen eine wichtige Rolle, die bereits in Abschnitt 2.1.2 definiert wurden (Definition 2.6). Wie in Bemerkung 2.2 gezeigt, haben überfüllte Graphen immer ungerade Knotenzahl und gehören schon aufgrund ihrer Kantenzahl zur Klasse 2.

Es gibt jedoch auch nicht-überfüllte Klasse-2-Graphen, zum Beispiel den Petersen-Graph. Die in Abbildung 3.1 dargestellten planaren kritischen Graphen sind, wie leicht nachzuprüfen ist, alle überfüllt. Untersucht man die Liste aller kritischen Graphen mit bis zu 7 Knoten und mit 9 Knoten und Maximalgrad 3 (dargestellt bei Fiorini und Wilson [44, S. 77] und bei Chetwynd und Yap [31]), so lässt sich anhand der Gradfolgen feststellen, dass nur ein einziger nicht-überfüllter Graph darunter ist, nämlich der Petersen-Graph nach Entfernen eines Knotens. Dieser Graph ist nicht planar. Da auch die von Chetwynd und Yap [31] angegebenen Knotengradfolgen für kritische Graphen mit 9 Knoten und Maximalgrad ≥ 4 zu überfüllten Graphen gehören und es keine kritischen Graphen mit 10 Knoten gibt, sind alle planaren Graphen mit bis zu 10 Knoten überfüllt. Die Fälle $|V(G)| = 11$ und $|V(G)| = 12$ ergeben sich aus folgendem Satz von Brinkmann und Steffen [23].

Satz 3.2 *Es gibt keine kritischen Graphen der Ordnung 12, und die einzigen nicht-überfüllten kritischen Graphen der Ordnung 11 sind die beiden in Abbildung 3.2 angegebenen.*

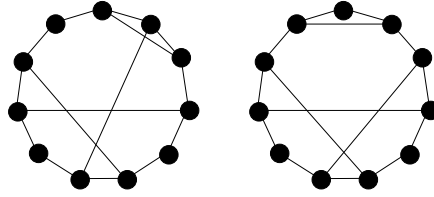


Abbildung 3.2: Nicht-überfüllte kritische Graphen der Ordnung 11.

Da auch diese beiden Graphen nicht planar sind, ergibt sich die folgende Aussage.

Korollar 3.1 *Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung $p \leq 12$ sind überfüllt.*

Neue Ergebnisse von Bokal und Brinkmann [15] zeigen, dass es auch keine kritischen Graphen der Ordnung $p = 14$ gibt und die vierzehn existierenden nicht-überfüllten kritischen Graphen der Ordnung 13 nicht planar sind. Somit kann man Korollar 3.1 auf alle planaren kritischen Graphen der Ordnung $p \leq 14$ erweitern.

Korollar 3.2 *Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung $p \leq 14$ sind überfüllt.*

In den Abschnitten 3.2 und 3.3 wird die Struktur planarer kritischer Graphen mit bis zu 12 Knoten beschrieben, um eine Methode zur Konstruktion aller dieser Graphen zu entwickeln. Tabelle 3.1 gibt eine Übersicht über die Anzahl nichtisomorpher planarer kritischer Graphen G der verschiedenen Knotengradfolgen mit $|V(G)| \leq 12$.

3.2 Gradfolgen planarer kritischer Graphen mit $p \leq 12$ Knoten

In diesem Abschnitt sollen alle planaren kritischen Graphen der Ordnungen $p = 9$ und $p = 11$ anhand ihrer Knotengradfolgen charakterisiert werden.

Zunächst lässt sich mit Hilfe von Korollar 3.1 der Maximalgrad planarer kritischer Graphen mit $p \leq 12$ Knoten beschränken.

Lemma 3.3 *Es sei G ein überfüllter planarer Graph der Ordnung p . Dann hat G einen Maximalgrad $\Delta \leq 5$.*

Beweis. Da G überfüllt und planar ist, gilt für die Kantenanzahl q von G einerseits $q \leq 3p - 6$ und andererseits $q \geq \Delta \lfloor p/2 \rfloor + 1$. Damit folgt

$$3p - 6 \geq q \geq \Delta \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1 = \Delta \frac{p-1}{2} + 1,$$

3.2. GRADFOLGEN PLANARER KRITISCHER GRAPHEN

$ V(G) $	$\Delta(G)$	Gradfolgen	# nichtisomorpher planarer Graphen	davon nicht hamiltonsch
3	2	2^3	1	-
5	2	2^5	1	-
	3	$2^1 3^4$	1	-
	4	$3^2 4^3$	1	-
7	2	2^7	1	-
	3	$2^1 3^6$	3	-
	4	$2^1 4^6$	1	-
		$3^2 4^5$	2	-
9	2	2^9	1	-
	3	$2^1 3^8$	12	-
	4	$2^1 4^8$	3	-
		$3^2 4^7$	16	-
	5	$4^3 5^6$	1	-
11	2	2^{11}	1	-
	3	$2^1 3^{10}$	53	1
	4	$2^1 4^{10}$	23	-
		$3^2 4^9$	145	1
	5	$3^1 4^1 5^9$	1	-
		$4^3 5^8$	1	-

Tabelle 3.1: Die Anzahl planarer kritischer Graphen mit $p \leq 12$ Knoten und der hamiltonschen darunter.

also

$$\Delta \leq \frac{6p - 14}{p - 1} = 6 - \frac{8}{p - 1} < 6.$$

□

Gemeinsam mit Korollar 3.2 beweist Satz 3.3 gleichzeitig die Vermutung 2.2, dass alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 6$ zur Klasse 1 gehören, für Graphen der Ordnung $p \leq 14$:

Korollar 3.3 *Alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 6$ und Ordnung $p \leq 14$ gehören zur Klasse 1.*

Beweis. Angenommen, G sei ein planarer Klasse-2-Graph der Ordnung $p \leq 14$ mit Maximalgrad $\Delta \geq 6$. Nach Satz 3.1 enthält G einen kritischen Teilgraph H mit gleichem Maximalgrad. Wegen Korollar 3.2 ist H überfüllt, also folgt aus Lemma 3.3, dass $\Delta \leq 5$ gilt, im Widerspruch zur Annahme. □

Überfüllte planare kritische Graphen haben nach Lemma 3.3 also einen Maximalgrad $\Delta \leq 5$. Andererseits sind kritische Graphen nach Bemerkung 3.1 immer 2-

zusammenhängend und haben damit einen Minimalgrad $\delta \geq 2$. Mit diesen Beschränkungen für den Grad der Knoten von G lässt sich die Anzahl der möglichen Gradfolgen überfüllter planarer kritischer Graphen G der Ordnung p einschränken.

Lemma 3.4 *Ein überfüllter planarer kritischer Graph der Ordnung p hat eine der Gradfolgen 2^p , $2^1 3^{p-1}$, $2^1 4^{p-1}$, $3^2 4^{p-2}$, $2^1 5^{p-1}$, $4^3 5^{p-3}$ oder $3^1 4^1 5^{p-2}$.*

Beweis. Es sei G ein überfüllter planarer kritischer Graph mit Maximalgrad Δ und Kantenzahl q . Da G überfüllt ist, gilt

$$q \geq \frac{p-1}{2} \Delta + 1.$$

Andererseits muss $G - e$ für jede Kante $e \in E(G)$ zur Klasse 1 gehören und ist daher, wie in Bemerkung 2.2 gezeigt, nicht-überfüllt. Also hat G genau die Kantenzahl $q = \Delta(p-1)/2 + 1$. Da nach obigen Überlegungen $\Delta(G) \leq 5$ und $\delta(G) \geq 2$ gilt, ergeben sich vier Möglichkeiten für den Maximalgrad von G .

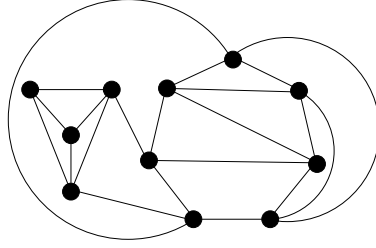
1. Gilt $\Delta = 2$, so ergibt sich $q = p$, also hat G die Gradfolge 2^p .
2. Gilt $\Delta = 3$, so ergibt sich $q = (3p-1)/2$, also hat G an jedem außer einem Knoten Maximalgrad und damit die Gradfolge $2^1 3^{p-1}$.
3. Gilt $\Delta = 4$, so ergibt sich $q = 2p-1$, also hat G entweder die Gradfolge $2^1 4^{p-1}$ oder die Gradfolge $3^2 4^{p-2}$.
4. Gilt $\Delta = 5$, so ergibt sich $q = (5p-3)/2$, also hat G entweder die Gradfolge $2^1 5^{p-1}$, die Gradfolge $4^3 5^{p-3}$ oder die Gradfolge $3^1 4^1 5^{p-2}$. \square

Im folgenden Lemma werden die in Lemma 3.4 angegebenen Gradfolgen für $p \leq 12$ genauer untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass mit einer Ausnahme alle 2-zusammenhängenden planaren Graphen der Ordnung $p \leq 12$, die eine der angegebenen Gradfolgen besitzen, kritisch sind.

Lemma 3.5 *Mit Ausnahme des Graphen aus Abbildung 3.3 sind alle 2-zusammenhängenden überfüllten planaren Graphen mit $p \leq 12$ Knoten und einer der folgenden Knotengradfolgen kritisch: 2^p , $2^1 3^{p-1}$, $2^1 4^{p-1}$, $3^2 4^{p-2}$, $2^1 5^{p-1}$, $3^1 4^1 5^{p-2}$ oder $4^3 5^{p-3}$.*

Beweis. Dass der einzige Graph der Gradfolge 2^p , nämlich der C_p , für ungerade p immer kritisch ist, ist klar: C_p gehört zur Klasse 2, aber $C_p - e$ ist isomorph zum Weg P_p und damit ein Klasse-1-Graph.

Es sei G ein 2-zusammenhängender planarer Graph einer der anderen Gradfolgen mit $p \leq 12$, der nicht zum Graph aus Abbildung 3.3 isomorph ist. Angenommen,


 Abbildung 3.3: Ausnahmegeraph der Gradfolge $3^2 4^9$.

G sei nicht kritisch. Da G überfüllt ist, gehört der Graph zu Klasse 2. Nach Satz 3.1 enthält G also einen kritischen Teilgraph H mit gleichem Maximalgrad $\Delta(H) = \Delta(G) = \Delta$. Der Graph H ist nach Satz 3.2 ebenfalls überfüllt und muss daher auch eine der Gradfolgen aus Lemma 3.4 haben. Es sei n die Ordnung von H . Da H weniger Kanten als G hat, nach Lemma 3.4 alle planaren kritischen Graphen der gleichen Knotenzahl jedoch auch gleich Größe besitzen, muss $n < p$ gelten. Im Folgenden wird gezeigt, dass die verschiedenen Möglichkeiten für die Graphen G und H in jedem Fall zum Widerspruch führen.

Hat G die Gradfolge $2^1 3^{p-1}$, so muss auch H Gradfolge $2^1 3^{n-1}$ haben, da dies die einzige Gradfolge kritischer Graphen mit Maximalgrad 3 ist. Versucht man jedoch, einen solchen Graph H zu einem Graph der Gradfolge $2^1 3^{p-1}$ zu erweitern, so enthält der entstehende Graph immer eine Artikulation (nämlich den Knoten vom Grad 2 in H) und ist damit nicht 2-zusammenhängend, im Widerspruch zur Annahme.

Hat G die Gradfolge $2^1 4^{p-1}$, so ist die Gradfolge des kritischen Teilgraphen H nach Lemma 3.4 entweder $2^1 4^{n-1}$ mit $n \geq 7$ oder $3^2 4^{n-2}$ mit $n \geq 5$. Ist $p \leq 9$, so hat H zu viele Kanten, um in G enthalten zu sein. Das Gleiche gilt für $p = 11$ und $n = 7$. Ist $p = 11$ und $n = 5$, so hat H die Knotengradfolge $3^2 4^3$ (siehe Abbildung 3.1) und ist isomorph zum $K_5 - e$. Versucht man, durch Einfügen von sechs Knoten und zwölf Kanten in H den Graph G der Gradfolge $2^1 4^{10}$ zu erhalten, so enthält der entstehende Graph in jedem Fall eine Unterteilung des K_5 und ist damit nicht planar, im Widerspruch zur Annahme.

Ist die Gradfolge von G die Folge $3^2 4^{p-2}$, so gibt es für die Gradfolge von H wiederum die Möglichkeiten $3^2 4^{p-2}$ und $2^1 4^{p-1}$. Für $p \leq 7$ und für $p = 9$ und $n = 7$ ist dies wie im vorigen Fall nicht möglich. Gilt $p = 9$ und $n = 5$, ist also H isomorph zum $K_5 - e$ und der Graph G entsteht durch Zufügen von vier Knoten und acht Kanten, so enthält G wiederum eine Unterteilung des K_5 und ist damit nicht planar. Es bleibt der Fall $p = 11$. Für $n = 9$ kann H kein Teilgraph von G sein. Gilt $n = 7$ und hat H die Gradfolge $2^1 4^6$, so kann G mit der Gradfolge $3^2 4^9$ nicht 2-zusammenhängend sein; aber wenn H die Gradfolge $3^2 4^5$ hat, so gibt es genau eine Möglichkeit, durch Zufügen von vier Knoten und acht Kanten einen Graphen G der Gradfolge $3^2 4^9$ zu erhalten: Die vier neuen Knoten bilden einen K_4 , wobei zwei von ihnen zu je einem der Knoten vom Grad 3 in H benachbart sind. Von

den beiden planaren kritischen Graphen der Gradfolge 3^24^5 (siehe Abbildung 3.1) enthält der erste jedoch einen $K_{3,3} - e$, so dass durch das Einfügen dieser Knoten und Kanten, wie in Abbildung 3.4 zu sehen, eine Unterteilung des $K_{3,3}$ entsteht und der Graph nicht mehr planar ist.

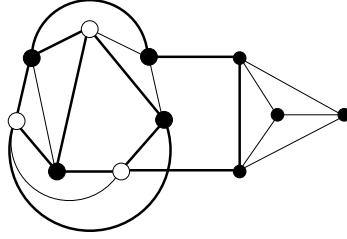


Abbildung 3.4: G enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

Fügt man die Knoten und Kanten in den anderen der beiden planaren kritischen Graphen der Gradfolge 3^24^5 ein, so ist der entstehende Graph zum Graph aus Abbildung 3.3 isomorph, im Widerspruch zur Annahme.

Schließlich bleibt noch der Fall $n = 5$. Damit der durch Einfügen von 6 Knoten und 16 Kanten in $H = K_5 - e$ entstehende Graph G keine Unterteilung des K_5 enthält, darf nur einer der beiden Knoten vom Grad 3 zu einem der sechs neuen Knoten adjazent sein; in dem Fall ist der entstehende Graph jedoch nicht 2-zusammenhängend.

Hat G die Gradfolge 2^15^{p-1} , so sieht man an Abbildung 3.1, dass H mindestens 9 Knoten haben muss, da es keine planaren kritischen Graphen der Ordnung $p < 9$ mit Maximalgrad $\Delta = 5$ gibt. Also hat G Gradfolge 2^15^{10} und H eine der Gradfolgen 2^15^8 , 4^35^6 oder $3^14^15^7$; in diesen Fällen kann H jedoch wiederum kein Teilgraph von G sein.

Die gleichen Überlegungen kann man auf den Fall übertragen, in dem G eine der Gradfolgen $3^14^15^{p-2}$ oder 4^35^{p-3} besitzt. Wieder muss H die Ordnung 9 und G die Ordnung 11 haben, und auch diesmal hat H zu viele Kanten, um ein Teilgraph von G zu sein.

Also erhält man für alle Gradfolgen, die für G möglich sind, einen Widerspruch. Somit ist der Graph aus Abbildung 3.3 der einzige planare Graph der Ordnung $p \leq 12$, der eine der angegebenen Knotengradfolgen besitzt und 2-zusammenhängend, aber nicht kritisch ist. \square

Da nach Satz 3.2 alle planaren kritischen Graphen mit $p \leq 12$ Knoten überfüllt sind und der Graph aus Abbildung 3.3 nicht kritisch ist (er enthält einen echten kritischen Teilgraph mit Gradfolge 3^24^5), kann man Lemma 3.4 und Lemma 3.5 zu folgendem Satz kombinieren:

Satz 3.6 *Ein planarer Graph der Ordnung $p \leq 12$ ist genau dann kritisch in Bezug auf Kantenfärbung, wenn er 2-zusammenhängend ist und seine Knotengrade einer*

der aufgeführten Folgen entsprechen: 2^p , $2^1 3^{p-1}$, $2^1 4^{p-1}$, $3^2 4^{p-2}$ (für $p = 11$ mit einer Ausnahme), $2^1 5^{p-1}$, $3^1 4^1 5^{p-2}$ oder $4^3 5^{p-3}$.

3.3 Konstruktion aller planaren kritischen Graphen der Ordnung $p \leq 12$

In diesem Abschnitt soll Satz 3.6 dazu benutzt werden, einen Algorithmus zu erstellen, mit dessen Hilfe sich alle planaren kritischen Graphen der Ordnung $p \leq 12$ generieren lassen. Die Idee des Algorithmus beruht neben den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2 auf einer weiteren Eigenschaft planarer kritischer Graphen kleiner Ordnung, die im Folgenden näher beschrieben wird. Eine vollständige Darstellung aller planaren kritischen Graphen mit 9 beziehungsweise 11 Knoten ist mit den Abbildungen 3.9 bis 3.15 gegeben.

Es sei \mathcal{A} die Menge aller Graphen der Gradfolge 2^p mit der Eigenschaft, dass unter ihren Komponenten höchstens eine Komponente ungerader Ordnung ist. Des weiteren sei \mathcal{B} die Menge aller Graphen der Gradfolge $2^1 3^{p-1}$, die einen Teilgraph gleicher Ordnung aus Menge \mathcal{A} haben, und \mathcal{C}_1 beziehungsweise \mathcal{C}_2 seien die Mengen aller Graphen der Gradfolge $2^1 4^{p-1}$ beziehungsweise $3^2 4^{p-2}$, die einen Teilgraph gleicher Ordnung aus Menge \mathcal{B} haben. Schließlich sei noch \mathcal{D}_1 als die Menge aller Graphen der Gradfolge $2^1 5^{p-1}$ definiert, die einen Teilgraph gleicher Ordnung aus Menge \mathcal{C}_1 besitzen, sowie \mathcal{D}_{2_1} beziehungsweise \mathcal{D}_{2_2} als die Mengen aller Graphen der Gradfolge $3^1 4^1 5^{p-2}$ beziehungsweise $4^3 5^{p-3}$, die einen Teilgraph gleicher Ordnung aus \mathcal{C}_2 haben. Dann gilt:

Satz 3.7 *Es sei G ein kritischer Graph mit ungerader Ordnung p . Hat G Knotengradfolge L , so gehört G zu Menge \mathcal{S} für*

$$(L, \mathcal{S}) \in \{(2^p, \mathcal{A}), (2^1 3^{p-1}, \mathcal{B}), (2^1 4^{p-1}, \mathcal{C}_1), (3^2 4^{p-2}, \mathcal{C}_2), (2^1 5^{p-1}, \mathcal{D}_1), (3^1 4^1 5^{p-2}, \mathcal{D}_{2_1}), (4^3 5^{p-3}, \mathcal{D}_{2_2})\}.$$

Die kritischen Graphen der angegebenen Gradfolgen entsprechen also einer Baumstruktur wie in Abbildung 3.5 angegeben: Ein kritischer Graph einer gegebenen Gradfolge mit Maximalgrad $\Delta > 2$ enthält immer einen Graph der übergeordneten Menge.

Beweis zu Satz 3.7. Es sei G ein kritischer Graph mit ungerader Ordnung p und Knotengradfolge L . Im Folgenden werden die sieben angegebenen Knotengradfolgen L untersucht.

$L = 2^p$: Da G kritisch ist, ist der Graph zusammenhängend. Hat G die Gradfolge 2^p , so besteht G also aus genau einem ungeraden Kreis und gehört damit zur Menge \mathcal{A} .

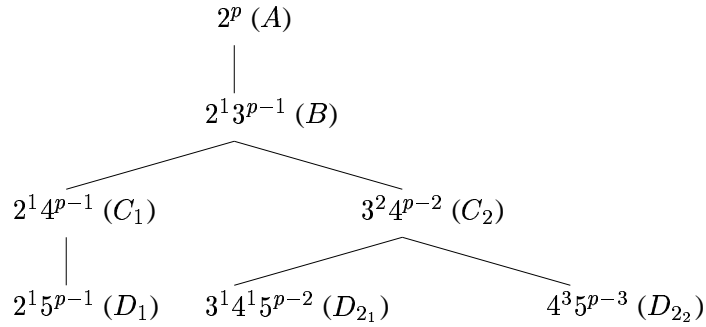


Abbildung 3.5: Der Aufbau kritischer Graphen mit gegebenen Knotengradfolgen.

$L = 2^1 3^{p-1}$: Ist G ein kritischer Graph der Gradfolge $2^1 3^{p-1}$, so sei $x \in V(G)$ der Knoten vom Grad 2 in G mit den Nachbarn y_1 und y_2 . Der Graph $G - xy_1$ muss 3-kantenfärbbar sein. Bei einer 3-Kantenfärbung von $G - xy_1$ werden die $(3p-3)/2$ Kanten in drei Farbklassen unterteilt. Da p ungerade ist, kann eine unabhängige Kantenmenge in G nach Bemerkung 2.1 höchstens $(p-2)/2$ Kanten enthalten; daher besteht jede Farbklass aus genau $(p-1)/2$ Kanten. Es sei S die Menge aller Kanten einer Farbklass, die nicht die Kante xy_2 enthält. Dann ist S ein 1-Faktor von $G - x$, das heisst, jeder Knoten von $G - x$ ist Endknoten genau einer Kante aus S . Der Graph $G - S$ hat demnach die Gradfolge 2^p . Da $G - S - xy_1$ eine 2-Kantenfärbung besitzt, kann nur höchstens eine Komponente von $G - S$ ungerade Knotenzahl haben. Damit gehört $G - S$ zur Menge \mathcal{A} und G selbst somit zur Menge \mathcal{B} .

$L = 2^1 4^{p-1}$: Es sei G ein kritischer Graph der Gradfolge $2^1 4^{p-1}$; dabei sei x wieder der Knoten vom Grad 2 mit den beiden Nachbarn y_1 und y_2 . Genau wie im vorherigen Fall müssen die vier Farbklassen einer 4-Kantenfärbung von $G - xy_1$ aus jeweils genau $(p-1)/2$ Kanten bestehen. Sind S_1 und S_2 zwei Farbklassen, die beide nicht die Kante xy_2 enthalten, so hat $G - S_1$ Gradfolge $2^1 3^{p-1}$ und $G - S_1 - S_2$ Gradfolge 2^p . Wiederum kann höchstens eine Komponente von $G - S_1 - S_2 - xy_1$ ungerade Ordnung haben, da der Graph 2-kantenfärbbar ist. Somit gehört der Graph $G - S_1 - S_2$ zur Menge \mathcal{A} , der Graph $G - S_1$ zur Menge \mathcal{B} und damit G selbst zur Menge \mathcal{C}_1 .

$L = 2^1 5^{p-1}$: Hat G die Gradfolge $2^1 5^{p-1}$, so sei wieder x der Knoten vom Grad 2 mit den beiden Nachbarn y_1 und y_2 . Analog zu den vorherigen Fällen lässt sich der Graph $G - xy_1$ mit fünf Farben kantenfärben, und es gibt mindestens vier Farbklassen S_1, \dots, S_4 , die nicht die Kante xy_2 enthalten und daher vier 1-Faktoren von $G - x$ bilden. Somit hat der Graph $G - S_1$ Gradfolge $2^1 4^{p-1}$, Graph $G - S_1 - S_2$ Gradfolge $2^1 3^{p-1}$ und $G - S_1 - S_2 - S_3$ Gradfolge 2^p . Die gleichen Überlegungen wie die vorangegangenen ergeben, dass $G - S_1 - S_2$ zur Menge \mathcal{B} gehört, $G - S_1$ zur Menge \mathcal{C}_1 und schließlich G selbst zur Menge \mathcal{D}_1 .

$L = 3^2 4^{p-2}$: Es sei nun G ein kritischer Graph der Gradfolge $3^2 4^{p-2}$ und $x \in V(G)$ einer der beiden Knoten vom Grad 3 mit den Nachbarn y_1, y_2 und y_3 . Wie

in den vorangegangenen Überlegungen kann gezeigt werden, dass $G - S_1 - S_2$ zur Menge \mathcal{A} gehört, während $G - S_1$ der Menge \mathcal{B} und daher G der Menge \mathcal{C}_2 angehört. Dabei sind S_1 und S_2 zwei Farbklassen einer 4-Kantenfärbung von $G - xy_1$, die beide weder die Kante xy_2 noch die Kante xy_3 enthalten.

$L = 3^1 4^1 5^{p-2}$: Hat G die Gradfolge $3^1 4^1 5^{p-1}$, so sei x der Knoten vom Grad 3, z der Knoten vom Grad 4 und y ein Nachbar von x mit $d(y) = 5$. Wieder enthält in einer 5-Kantenfärbung von $G - xy$ jede der Farbklassen genau $(p-1)/2$ Kanten. Es seien S_1 und S_2 zwei Farbklassen, die jeweils keine zu x inzidenten Kanten enthalten. Entfernt man S_1 , so hat der entstehende Graph die Gradfolge $3^2 4^{p-2}$; entfernt man außerdem noch die Kanten aus S_2 , so erhält man einen Graph der Gradfolge $2^1 3^{p-1}$. Von den verbleibenden drei Farbklassen wähle man nun eine, die keine zu dem Knoten vom Grad 2 inzidenten Kanten enthält; entfernt man auch noch die Kanten dieser Farbklassse, so erhält man einen Graph der Gradfolge 2^p . Da wiederum nur eine Komponente von $G - S$ ungerade Knotenzahl haben kann, gilt also: Der Graph $G - S_1 - S_2$ gehört zur Menge \mathcal{B} , der Graph $G - S_1$ zur Menge \mathcal{C}_2 und damit G selbst zur Menge \mathcal{D}_{21} .

$L = 4^3 5^{p-3}$: Hat G schließlich Gradfolge $4^3 5^{p-3}$, so seien x_1, x_2 und x_3 die Knoten vom Grad 4 und y ein Nachbar von x_1 mit $d(y) = 5$. Es sei S_1 eine Farbklassse einer 5-Kantenfärbung von $G - x_1 y$, die keine zu x_1 inzidenten Kanten enthält. Entfernt man S_1 , so hat der entstehende Graph nach zu den bereits behandelten Fällen analogen Überlegungen die Gradfolge $3^2 4^{p-2}$. Von den verbleibenden vier Farbklassen wählt man nun eine Klasse S_2 , in der keine zu x_2 inzidenten Kanten liegen. $G - S_1 - S_2$ hat nun Gradfolge $2^1 3^{p-1}$. Es bleiben noch drei Farbklassen; von diesen wähle man nun eine, die keine zu x_3 inzidenten Kanten enthält. Entfernt man auch noch die Kanten dieser Farbklassse, so erhält man einen Graph der Gradfolge 2^p , der wiederum nach Wegnahme der Kante $x_1 y$ eine 2-Kantenfärbung besitzt. Also gilt: $G - S_1 - S_2$ gehört zur Menge \mathcal{B} , der Graph $G - S_1$ zur Menge \mathcal{C}_2 und damit G selbst zur Menge \mathcal{D}_{22} . \square

Das Computerprogramm zur Konstruktion aller planaren Graphen der Ordnung $p \leq 12$, das auf den Sätzen 3.6 und 3.7 basiert, soll am Beispiel der planaren kritischen Graphen mit $p = 9$ und $p = 11$ erklärt werden. Zur Menge \mathcal{A} gehören für $p = 9$ die Graphen C_9 , $C_3 \cup C_6$ und $C_5 \cup C_4$ und für $p = 11$ die Graphen C_{11} , $C_3 \cup C_8$, $C_5 \cup C_6$, $C_7 \cup C_4$ und $C_3 \cup C_4 \cup C_4$; davon sind genau die Graphen C_9 und C_{11} kritisch. Alle kritischen planaren Graphen mit 9 beziehungsweise 11 Knoten sind in den Abbildungen 3.9 bis 3.15 zusammengefasst; die nicht kritischen Graphen der Menge \mathcal{A} werden in Abbildung 3.6 dargestellt.

Nach Satz 3.7 enthalten alle kritischen Graphen der Gradfolge $2^1 3^{p-1}$ für $p = 9$ beziehungsweise $p = 11$ einen Teilgraph gleicher Ordnung aus Menge \mathcal{A} ; genauer gesagt erhält man alle diese Graphen, indem man nacheinander $(p-1)/2$ unabhängige Kanten in jeden Graph der Menge \mathcal{A} einfügt, der die gleiche Ordnung p besitzt. Es wird also zunächst ein Graph der Menge \mathcal{A} erstellt, dessen Knoten mit 0 bis $p-1$ bezeichnet sind. Das Einfügen der Kanten an alle Knoten bis auf den

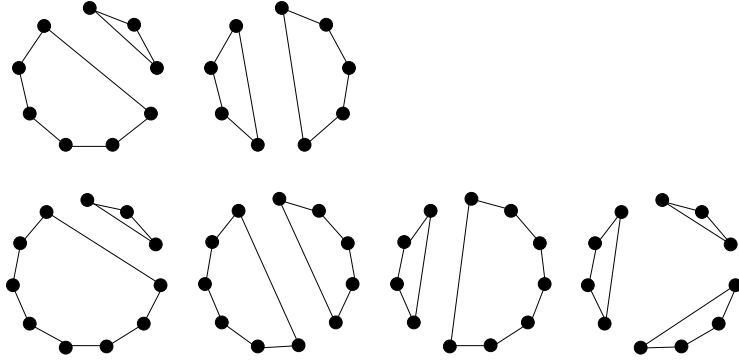


Abbildung 3.6: Alle nicht kritischen Graphen der Menge \mathcal{A} für $p \in \{9, 11\}$.

Knoten 0 erfolgt nun durch eine Backtracking-Prozedur: Für den aktuellen Knoten i (zu Beginn Knoten 1) wird überprüft, ob sich eine Kante zum Knoten j mit $j = p - 1, p - 2, \dots, i + 1$ hinzufügen lässt (also ob eine solche Kante noch nicht existiert und ihr Einfügen die festgelegten Gradzahlen der einzelnen Knoten nicht überschreitet). Wird ein solcher Knoten j gefunden, so wird er mit Knoten i verbunden und, sofern die gewünschte Gradfolge noch nicht erreicht wurde, die Prozedur für den Knoten $i + 1$ rekursiv aufgerufen. Ist es für einen Knoten i nicht möglich, einen passenden Knoten j zu finden, so wird die zuletzt hinzugenommene Kante wieder entfernt.

Bei jedem neuen Einfügen einer Kante wird der entstehende Graph vorher auf Planarität überprüft. Dazu wurde ein Algorithmus von Demoucron, Malgrange und Pertuiset [35] implementiert, der zum Beispiel bei Chartrand und Oellermann [27, S. 255–265] beschrieben wird. Ausgehend von einem ebenen Teilgraph des zu untersuchenden Graphen (in diesem Fall einem Kreis des Ausgangsgraphen der Gradfolge 2^p) werden sukzessive planare Teilgraphen des Restgraphen eingefügt, sofern sie sich in eine Fläche des ebenen Graphen einbetten lassen. Der Algorithmus ist deshalb so gut für die vorliegende Aufgabe geeignet, weil die einzufügenden planaren Teilgraphen in diesem Fall gerade aus den einzelnen $(p - 1)/2$ einzufügenden Kanten bestehen.

Hat man alle $(p - 1)/2$ Kanten eingefügt, so wird der Graph auf Isomorphie zu bereits gefundenen Graphen untersucht. Dazu wird an jedem Knoten v des Graphen eine Reihe von Informationen $d_i(v)$ gespeichert, für die gilt

$$d_1(v) = d(v) \quad \text{und} \quad d_i(v) = \sum_{w \in N(v)} d_{i-1}(w) \quad \text{für alle } i = 2, \dots, \frac{p-3}{2}.$$

Sind zwei Graphen isomorph, so müssen die Informationen $d_i(v)$ für je zwei sich entsprechende Knoten der Graphen und für alle Zahlen i übereinstimmen. Für die hier untersuchten Graphen reichte es dabei aus, die Werte $d_i(v)$ für $i \leq (p-3)/2$ zu untersuchen. Um zu überprüfen, ob zwei gegebene Graphen isomorph sind, werden

nun alle möglichen Abbildungen der Knotenmengen aufeinander berechnet, bei denen nur Knoten aufeinander abgebildet werden, deren Gradinformationen $d_i(v)$ für alle $i = 1, \dots, (p-3)/2$ übereinstimmen. Für jede gefundene Abbildung wird untersucht, ob sie adjazenzzerhaltend ist. In diesem Fall sind die Graphen isomorph; sonst wird der neue Lösungsgraph zu den bereits gefundenen Graphen gespeichert. Daraufhin wird die zuletzt eingefügte Kante wieder entfernt und nach weiteren Graphen gesucht.

Mit Hilfe des Computers erhält man so für $p = 9$ genau 12 Graphen, die 2-zusammenhängend und damit kritisch sind und den C_9 enthalten. Des weiteren erhält man genau zwei weitere planare, jedoch nicht 2-zusammenhängende und damit auch nicht kritische Graphen, die den Graph $C_5 \cup C_4$ enthalten. Diese 14 Graphen sind die einzigen Graphen mit 9 Knoten in Menge \mathcal{B} ; die nicht kritischen darunter sind in Abbildung 3.7 dargestellt. Für $p = 11$ erhält man 53 kritische planare Graphen, die den C_{11} enthalten (und somit hamiltonsch sind), einen weiteren kritischen planaren Graph, der den $C_7 \cup C_4$ enthält und darüber hinaus 11 nicht kritische planare Graphen, die ebenfalls in Abbildung 3.7 dargestellt sind; 5 davon entstehen durch Einfügen von Kanten in den $C_5 \cup C_6$ und sechs aus dem $C_7 \cup C_4$.

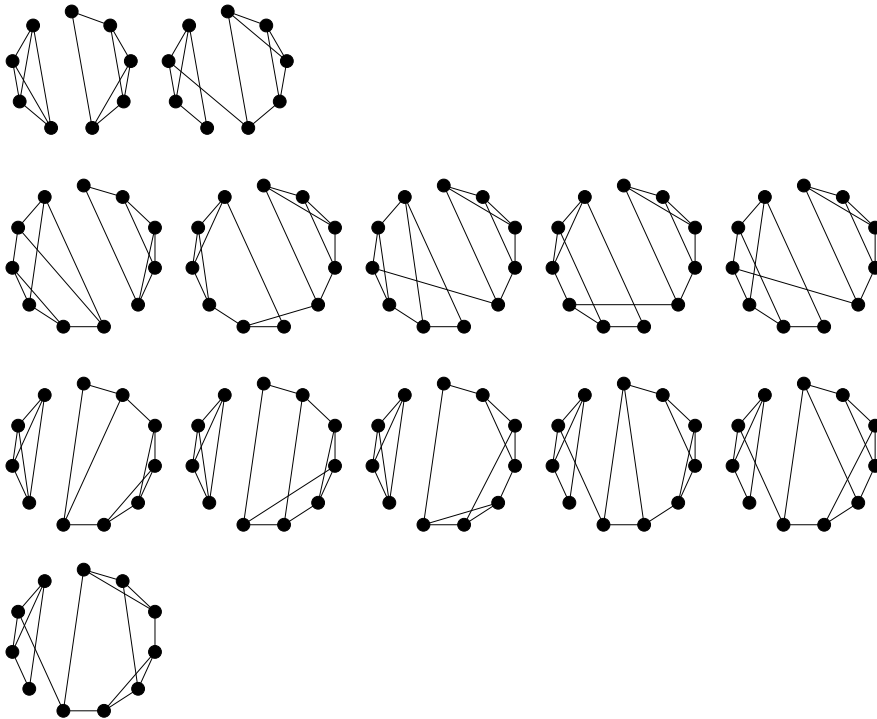


Abbildung 3.7: Nicht kritische Graphen der Menge \mathcal{B} für $p \in \{9, 11\}$.

Die kritischen Graphen der Gradfolge $2^1 4^{p-1}$ erhält man, indem man $(p-1)/2$ unabhängigen Kanten an alle Knoten vom Grad 3 eines jeden Graphen aus Menge \mathcal{B} einfügt. Als Ausgangsgraph liest man also nacheinander alle Graphen der Men-

ge \mathcal{B} mit $p \in \{9, 11\}$ ein, die im vorherigen Schritt gefunden wurden. Der Knoten vom Grad 2 erhält dabei die Bezeichnung 0, alle anderen werden von 1 bis $p - 1$ durchnummeriert, und es werden genau wie oben beschrieben $(p - 1)/2$ Kanten an alle Knoten bis auf Knoten 0 eingefügt. Aus den 12 kritischen Graphen mit 9 Knoten erhält man so 3 kritische Graphen der Gradfolge $2^1 4^8$; die beiden nicht kritischen Graphen der Gradfolge $2^1 3^8$ führen jedoch zu keinen weiteren Graphen der Gradfolge $2^1 4^8$. Ist $p = 11$, so erhält man aus den 53 hamiltonschen kritischen Graphen genau 23 kritische Graphen der Gradfolge $2^1 4^{10}$, aus dem nicht hamiltonschen kritischen Graph und aus den 11 nicht kritischen Graphen jedoch ebenfalls keine weiteren Graphen dieser Gradfolge. Alle diese Graphen sind die einzigen Graphen mit 9 beziehungsweise 11 Knoten in der Menge \mathcal{C}_1 .

Für die Gradfolge $3^2 4^{p-2}$ muss man ebenfalls $(p - 1)/2$ unabhängige Kanten in die Graphen der Menge \mathcal{B} einfügen, diesmal jedoch an alle Knoten bis auf einen vom Grad 3. Diese Prozedur muss also $(p - 1)$ -mal wiederholt werden: In jedem eingelesenen Graph der Menge \mathcal{B} erhält sukzessive jeder Knoten vom Grad 3 die Bezeichnung 0, und in jedem dieser Fälle werden $(p - 1)/2$ unabhängige Kanten an alle Knoten außer Knoten 0 eingefügt. Für $p = 9$ ergeben sich so genau 16 kritische und hamiltonsche planare Graphen, die aus den 12 hamiltonschen Graphen der Menge \mathcal{B} entstehen, und keine weiteren planaren Graphen. Für $p = 11$ erhält man 145 kritische hamiltonsche Graphen aus den 53 hamiltonschen Graphen der Menge \mathcal{B} , einen weiteren kritischen Graph aus einem nicht kritischen Graph aus Abbildung 3.7, einen 2-zusammenhängenden Graph, der jedoch isomorph zum Graph aus Abbildung 3.3 und somit nicht kritisch ist und außerdem 5 weitere nicht kritische planare Graphen, die in Abbildung 3.8 dargestellt sind. Alle diese Graphen gehören zur Menge \mathcal{C}_2 .

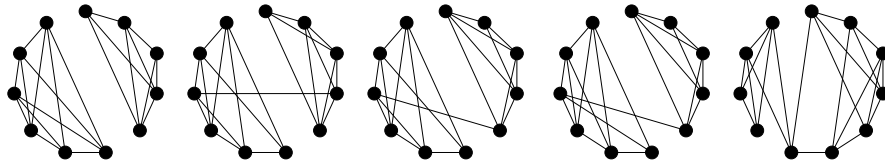


Abbildung 3.8: Nicht kritische Graphen der Menge \mathcal{C}_2 für $p \in \{9, 11\}$.

Die Graphen der Gradfolge $2^1 5^{p-2}$ entstehen nun wiederum durch Einfügen von $(p - 1)/2$ unabhängigen Kanten an alle Knoten vom Grad 3 eines jeden Graphen aus Menge \mathcal{C}_1 . Die Graphen der Menge \mathcal{C}_1 mit Ordnung $p \in \{9, 11\}$ werden somit eingelesen und der Knoten vom Grad 2 erhält den Namen 0. Weder für $p = 9$ noch für $p = 11$ erhält man so jedoch planare Graphen der Gradfolge $2^1 5^{p-2}$. Also sind in der Menge \mathcal{D}_1 keine Graphen mit 9 oder 11 Knoten.

Fügt man $(p - 1)/2$ unabhängige Kanten an alle Knoten bis auf einen vom Grad 3 in die Graphen der Ordnung p aus Menge \mathcal{C}_2 ein, so erhält man alle planaren kritischen Graphen der Gradfolge $3^1 4^1 5^{p-2}$. Demnach werden die Graphen der Menge \mathcal{C}_2 eingelesen und jeder der beiden Knoten vom Grad 3 erhält einmal den

Namen 0, während die anderen Knoten von 1 bis $p - 1$ durchnummeriert werden. Für $p = 9$ entstehen so jedoch keine planaren Graphen. Ist $p = 11$, so ergibt sich genau ein hamiltonscher kritischer planarer Graph der Gradfolge $3^1 4^1 5^9$ und keine weiteren planaren Graphen. Dieser ist der einzige Graph der Ordnung 9 oder 11 in Menge \mathcal{D}_{2_1} .

Schließlich fügt man für die Graphen der Gradfolge $4^3 5^{p-3}$ genau $(p - 1)/2$ unabhängige Kanten an alle Knoten bis auf einen vom Grad 4 in die Graphen der Menge \mathcal{C}_2 ein. Es werden also die Graphen der Menge \mathcal{C}_2 eingelesen, wobei jeder Graph $(p - 2)$ -mal untersucht wird: jeder Knoten vom Grad 4 erhält einmal den Namen 0. Sowohl für Graphen mit 9 als auch mit 11 Knoten ergibt sich so jeweils genau ein kritischer, hamiltonscher planarer Graph der Gradfolge $4^3 5^{p-3}$; diese beiden gehören zur Menge \mathcal{D}_{2_2} .

Im Folgenden sind alle kritischen planaren Graphen mit 9 beziehungsweise 11 Knoten dargestellt. Die beiden nicht hamiltonschen darunter sind jeweils mit einem Stern markiert.

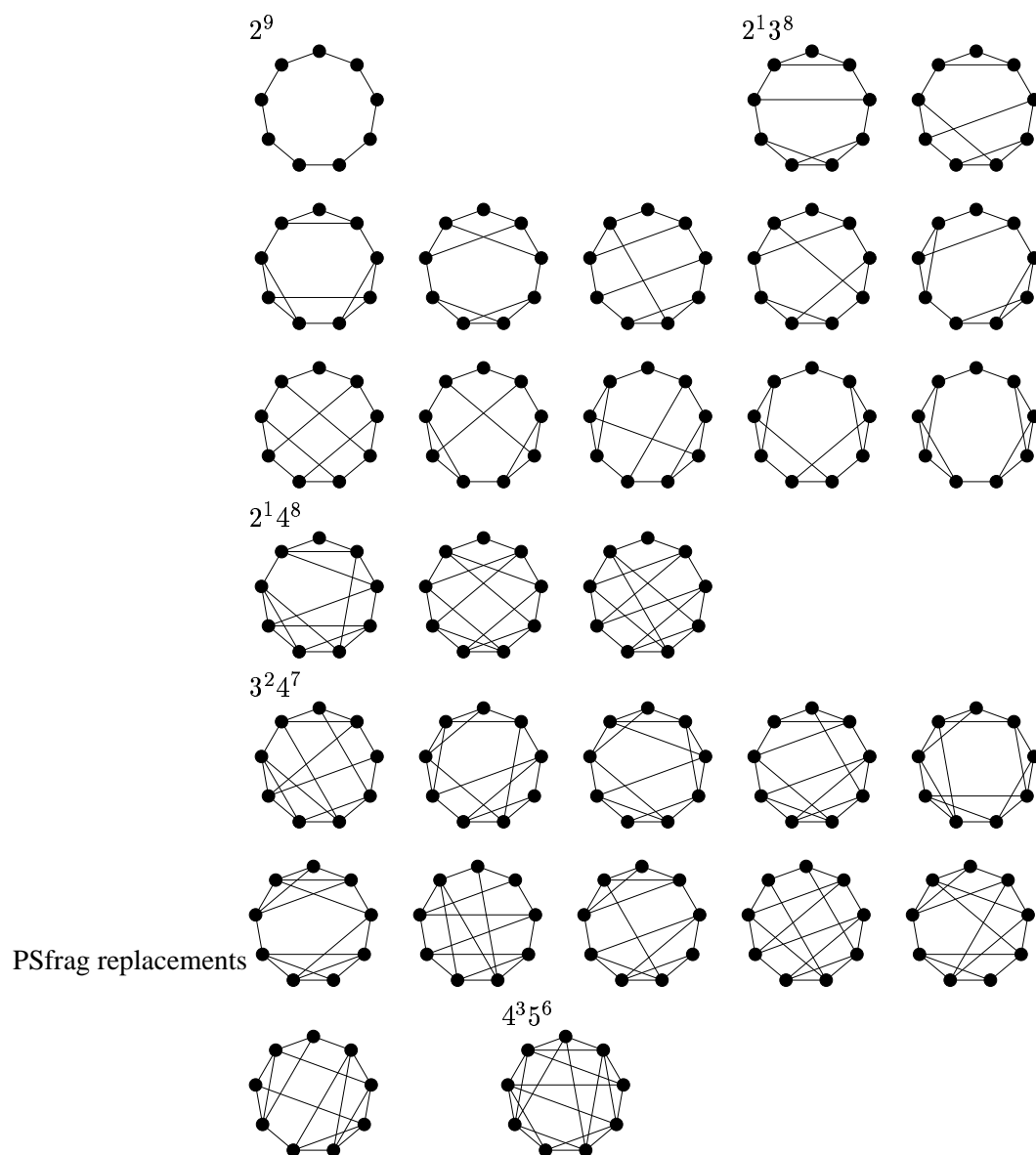


Abbildung 3.9: Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung 9.

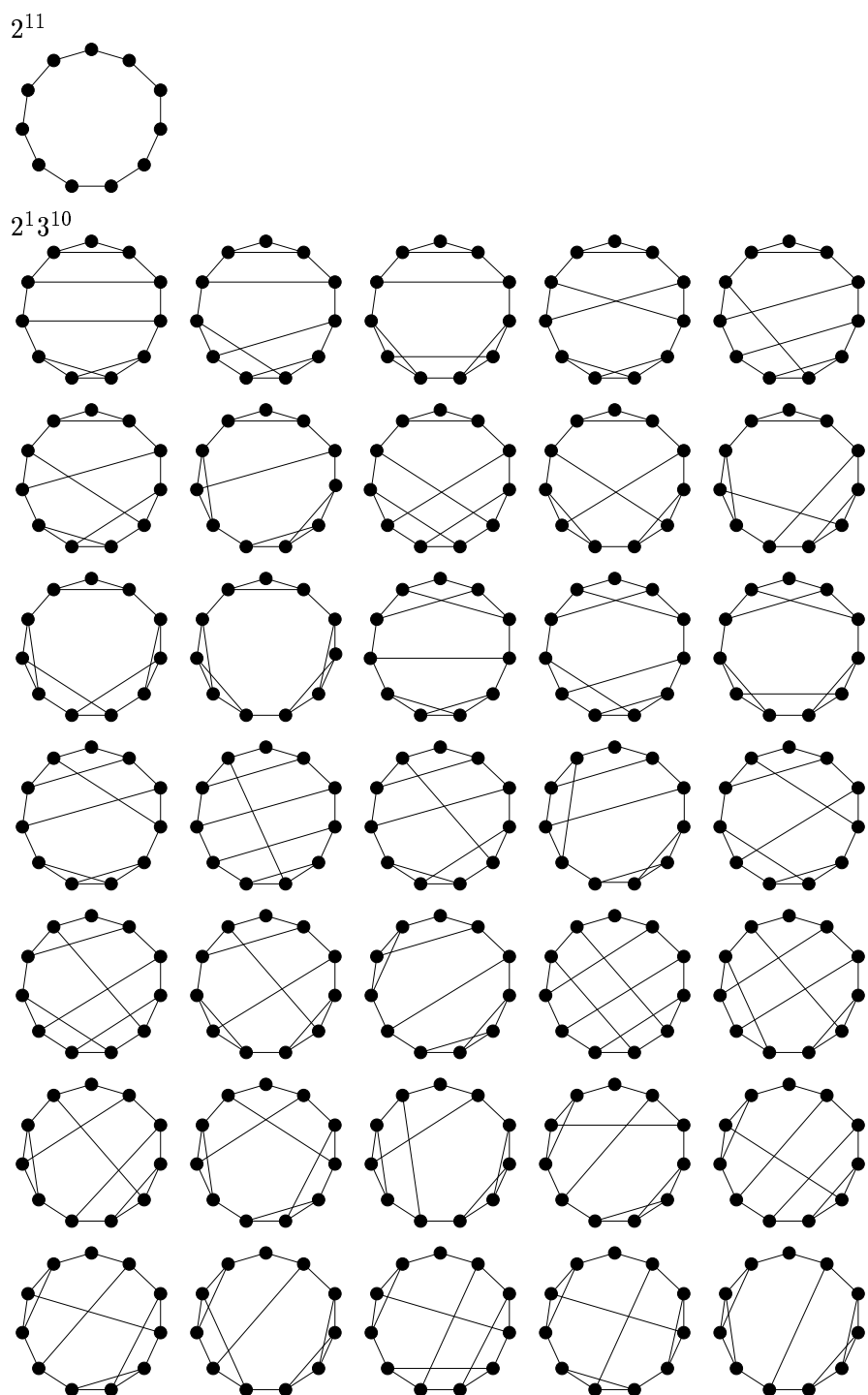


Abbildung 3.10: Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung 11 (Fortsetzung nächste Seite).

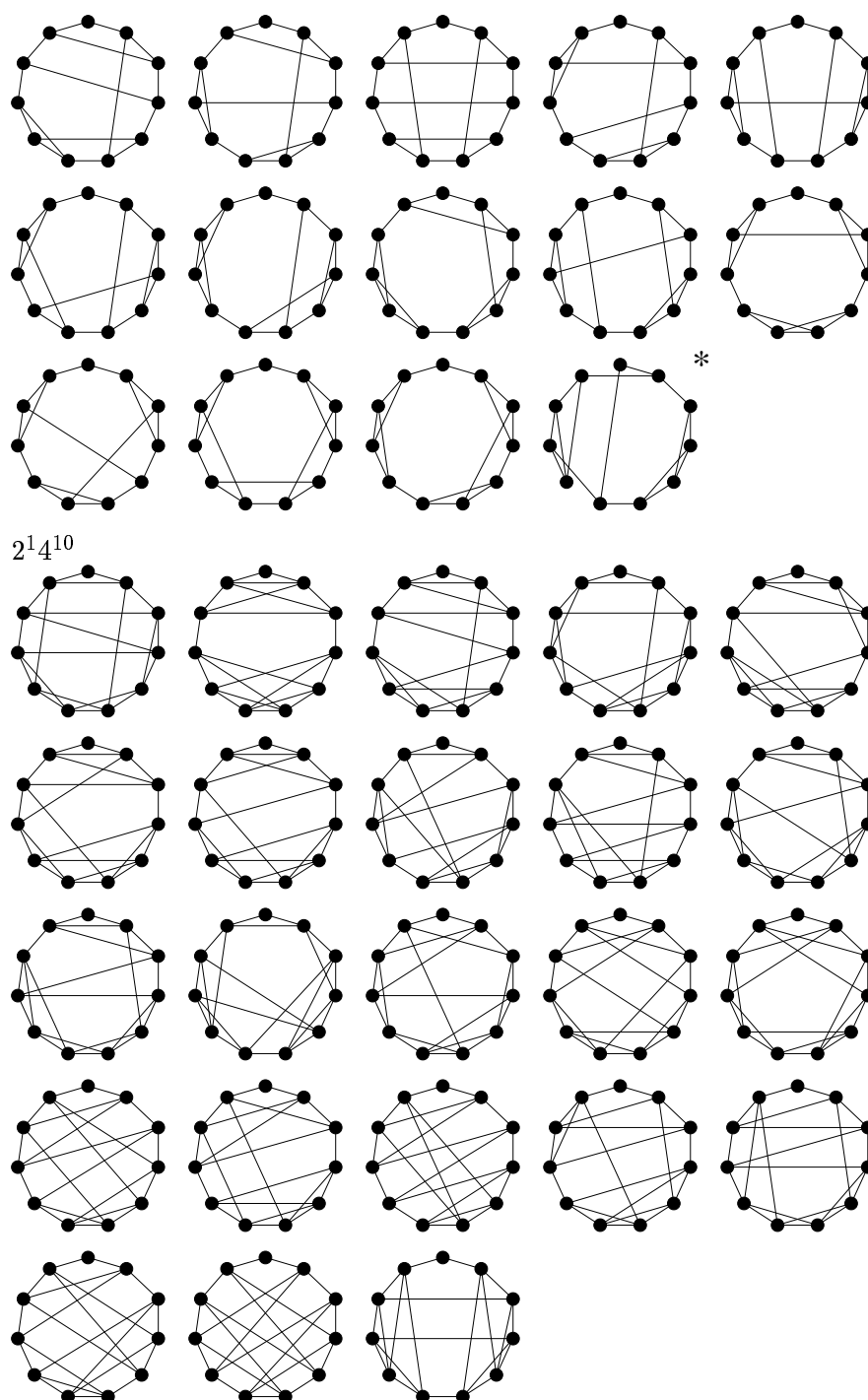


Abbildung 3.11: Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung 11 (Fortsetzung).

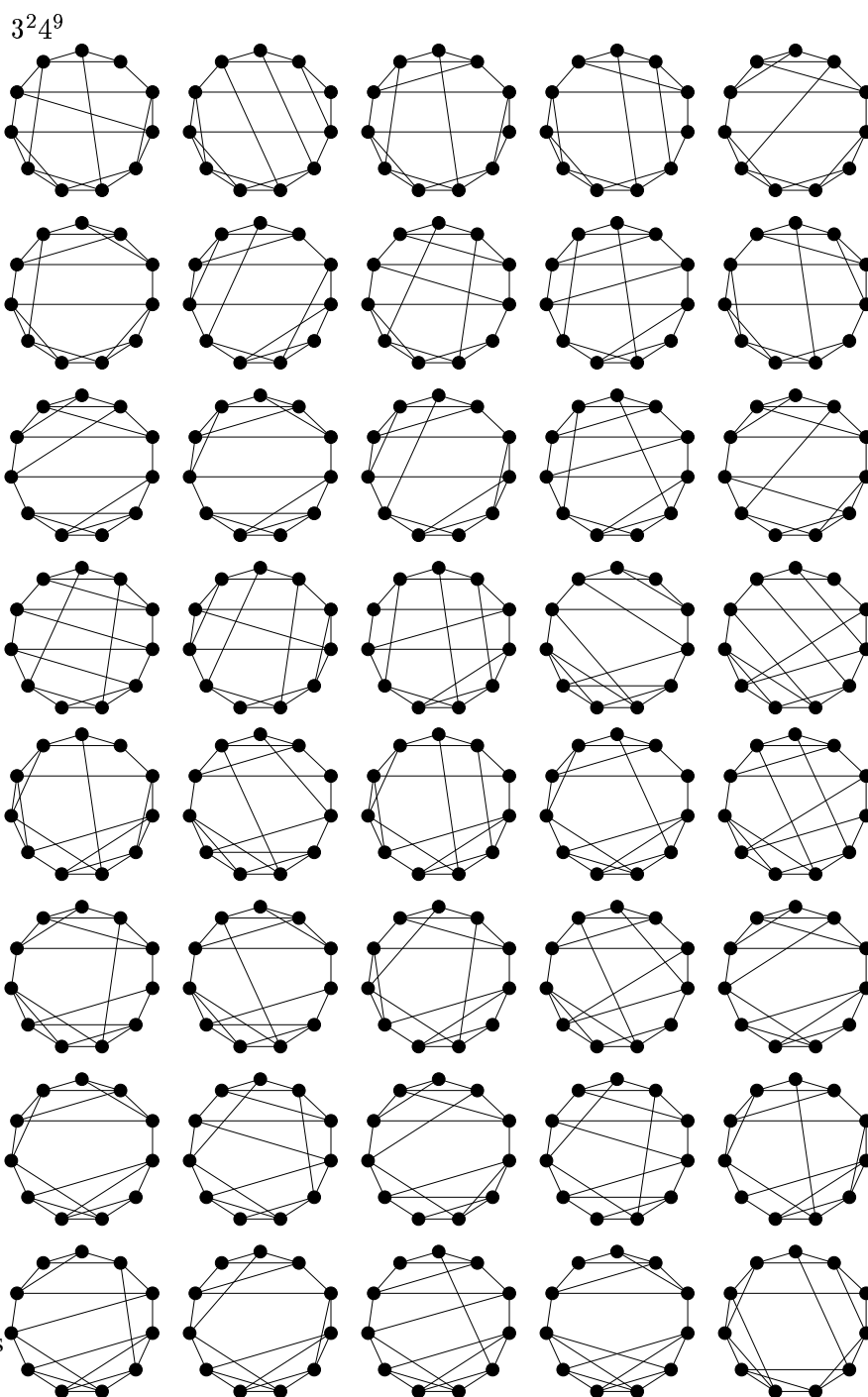


Abbildung 3.12: Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung 11 (Fortsetzung).

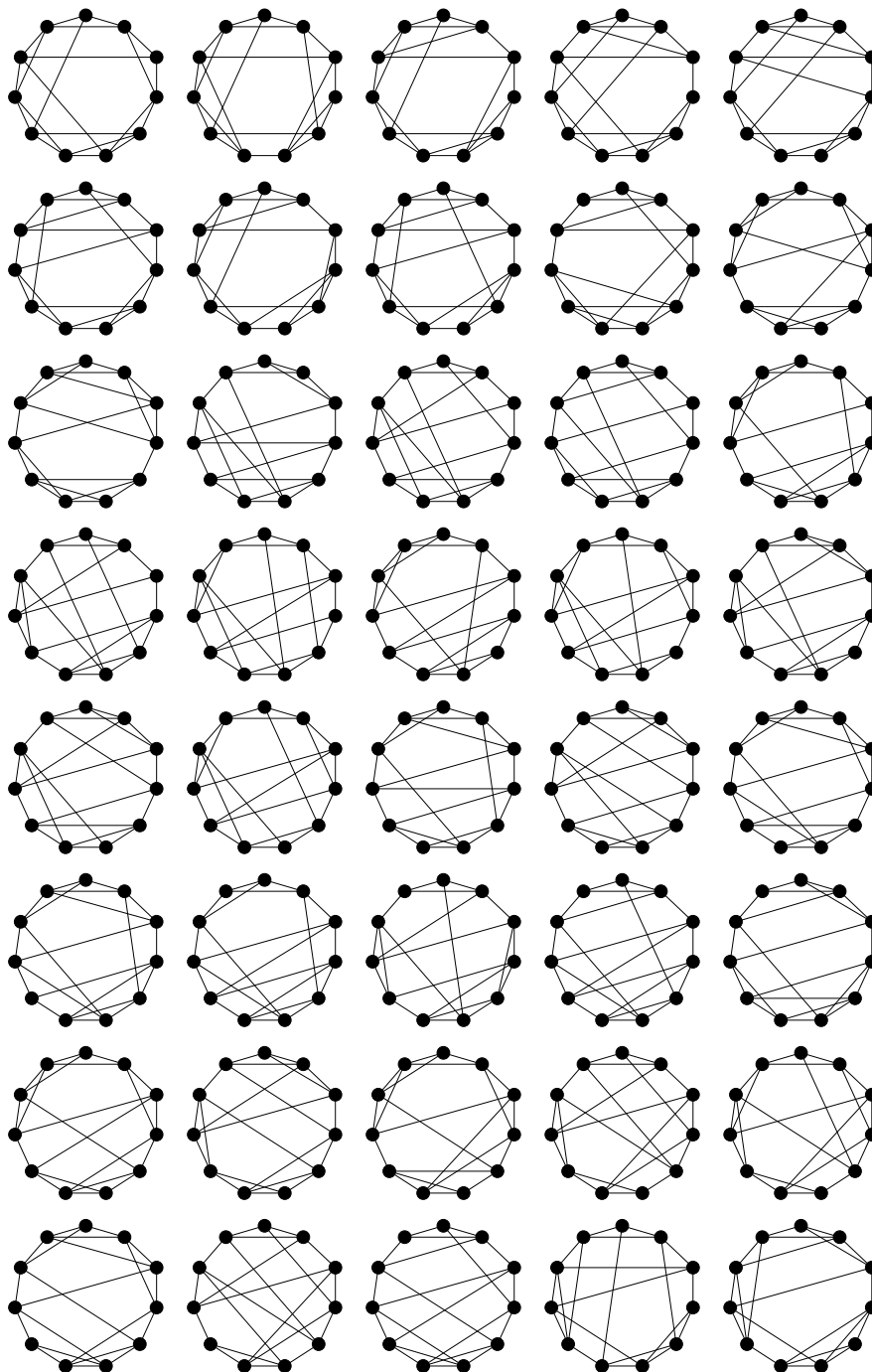


Abbildung 3.13: Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung 11 (Fortsetzung).

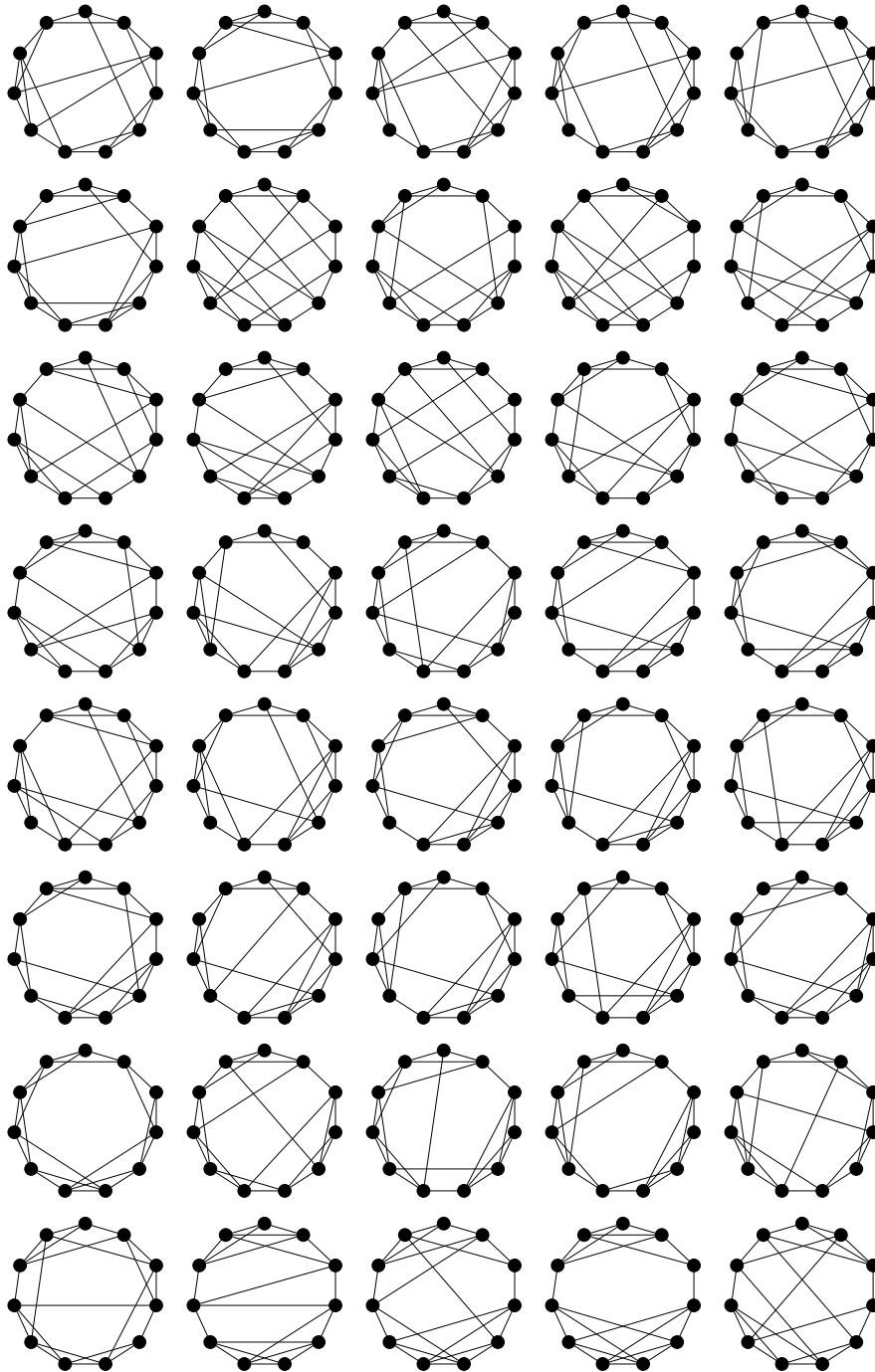


Abbildung 3.14: Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung 11 (Fortsetzung).

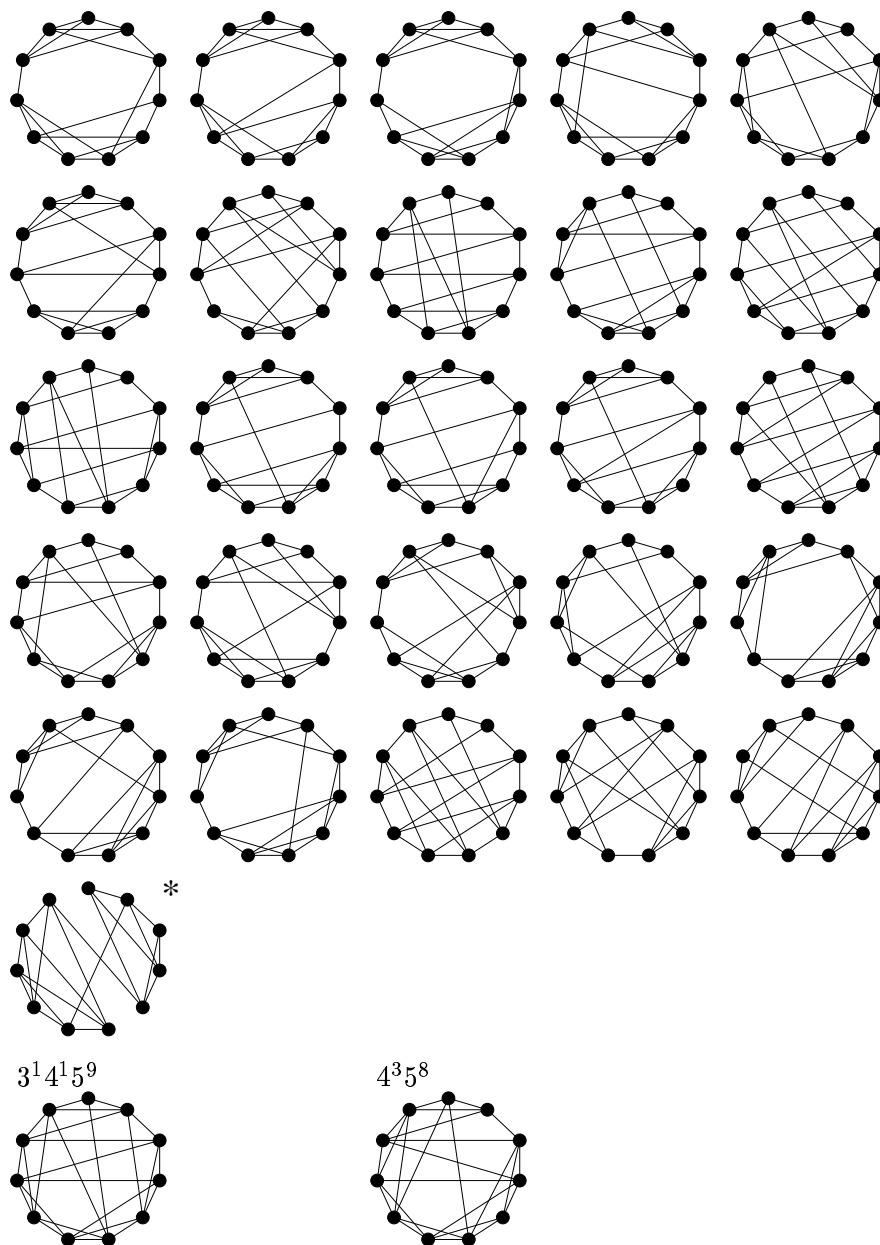


Abbildung 3.15: Alle planaren kritischen Graphen der Ordnung 11 (Fortsetzung).

Kapitel 4

Kreisfärbungen

Bei der Kreisfärbung handelt es sich, wie in der Einleitung bereits dargestellt, um eine spezielle Form der Knotenfärbung. Die dazugehörige kreischromatische Zahl $\chi_c(G)$ eines Graphen G , die 1988 von Vince [98] unter dem Namen „starchromatic number“ definiert und mit Methoden der kontinuierlichen Mathematik untersucht wurde, nimmt in Extremfällen den Wert der chromatischen Zahl an. Bondy und Hell [17] behandelten das gleiche Gebiet unter rein kombinatorischen Gesichtspunkten. Eine relativ neue Arbeit von Zhu [114] gibt einen ausführlichen Überblick über bekannte Resultate zur Kreisfärbung von Graphen. Die kreischromatische Zahl konnte bisher für einzelne Klassen von Graphen bestimmt werden, so zum Beispiel für bipartite, für vollständige und für vollständig multipartite Graphen sowie für Kreise C_p und Räder W_p (siehe Vince [98], Bondy und Hell [17], Zhu [113]); von Wellmann [105] wurde sie außerdem für outerplanare Graphen und für kleine Graphen (mit bis zu 7 Knoten) bestimmt.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die Konzepte der Kreisfärbung auf Kantenfärbungen (Abschnitt 4.1) und Totalfärbungen (Abschnitt 4.2) übertragen.

4.1 Kreiskantenfärbung

Die Kreiskantenfärbung wurde bisher als Kreisfärbung von Kantengraphen nur am Rande erwähnt; Moser [86] beschäftigte sich darüber hinaus mit der Frage, für welche rationalen Zahlen r es einen Kantengraph G mit kreischromatischer Zahl r gibt. Die direkte Übertragung von Definitionen, Eigenschaften und Ergebnissen zur kreischromatischen Zahl $\chi_c(G)$ auf Kantenfärbung, die in diesem Unterabschnitt behandelt wird, wurde von Hackmann und Kemnitz [55] erstmals zusammengestellt.

Im Folgenden werden zunächst die Definitionen vorgestellt und in Abschnitt 4.1.1 einige Eigenschaften des kreischromatischen Index behandelt; schließlich wird in Abschnitt 4.1.2 der kreischromatische Index von Kreisen, vollständigen Graphen und des Petersen-Graphen bestimmt.

In Abschnitt 4.1.3 wird der kreischromatische Index von Klasse-2-Graphen kleiner Ordnung ermittelt.

Definition 4.1 Es seien $k, d \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2d$. Eine (k, d) -Kantenfärbung eines Graphen G ist eine Abbildung $c : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_k$, so dass für je zwei adjazente Kanten e_i und e_j gilt $d \leq |c(e_i) - c(e_j)| \leq k - d$. Der Graph G ist (k, d) -kantenfärbbar, wenn es eine (k, d) -Kantenfärbung von G gibt, und der kreischromatische Index ist definiert als $\chi'_c(G) = \inf\{k/d : G \text{ ist } (k, d)\text{-kantenfärbbar}\}$.

Für $d = 1$ entspricht die (k, d) -Kantenfärbung der in Kapitel 2 definierten k -Kantenfärbung eines Graphen. Damit gilt die folgende Bemerkung.

Bemerkung 4.1 Da $\chi'(G)$ die kleinste Zahl k ist, für die ein Graph G eine $(k, 1)$ -Kantenfärbung besitzt, gilt $\chi'_c(G) \leq \chi'(G)$.

Zhu [113] führte 1992 für die Kreisknotenfärbung eine andere, äquivalente Definition der kreischromatischen Zahl ein, auf die der Begriff der Kreisfärbung zurückgeht. Auch diese Definition lässt sich auf Kantenfärbung übertragen.

Definition 4.2 Es sei C ein Kreis der Länge r in \mathbb{R}^2 . Eine r -Kreiskantenfärbung eines Graphen G ist eine Abbildung c , die jeder Kante e von G ein offenes Kreisintervall $c(e)$ der Länge 1 auf C so zuordnet, dass sich die Intervalle benachbarter Kanten nicht überschneiden. Besitzt G eine r -Kreiskantenfärbung, so nennt man den Graph r -kreiskantenfärbbar. Der kreischromatische Index $\chi'_c(G)$ kann nun definiert werden als Infimum aller Zahlen $r \in \mathbb{R}$, für die G eine r -Kreiskantenfärbung besitzt.

Bemerkung 4.2 Die Definitionen 4.1 und 4.2 für den kreischromatischen Index sind äquivalent.

Beweis. Es sei c eine (k, d) -Kantenfärbung eines Graphen G . Nun sei c' eine Abbildung von $E(G)$ auf einen Kreis der Länge k/d , die jeder Kante e das offene Kreisintervall $(c(e)/d, c(e)/d + 1)$ zuordnet. Dann hat jedes Intervall $c'(e)$ die Länge 1 und die Intervalle benachbarter Kanten überschneiden sich nicht. Somit ist c' eine k/d -Kreiskantenfärbung von G .

Ebenso entspricht jeder Kreisfärbung c' auf einem Kreis mit rationaler Länge k/d eine (k, d) -Kantenfärbung c : Ist c' eine k/d -Kreiskantenfärbung, so definiert man $c(e) = \lfloor c'_*(e)d \rfloor$ für jede Kante $e \in E(G)$, wobei $c'_*(e)$ der Ausgangspunkt des Abschlusses des Intervalls $c'(e)$ ist, wenn C im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Somit gilt $d \leq |c(e_i) - c(e_j)| \leq k - d$ für je zwei benachbarte Kanten e_i und e_j , und c ist eine (k, d) -Kantenfärbung von G . \square

Bei der Untersuchung der Eigenschaften von χ'_c zeigt es sich, dass sich mal die eine, mal die andere Definition besser in Beweisen verwenden lässt.

4.1.1 Eigenschaften des kreischromatischen Index

Betrachtet man die Definition der r -Kreiskantenfärbung, so sieht man sofort, dass ein k/d -kreiskantenfärbbarer Graph mit $k/d \leq k'/d'$ für natürliche Zahlen k, d, k' und d' immer auch k'/d' -kreiskantenfärbbar ist: Hat man eine k/d -Kreiskantenfärbung gegeben, so bedeutet der Wechsel von k/d zu k'/d' , dass sich in der Darstellung als Kreisfärbung der Kreis der Länge k/d auf die Länge k'/d' vergrößert, ohne die Färbung des Graphen zu verändern. Somit erhält man eine k'/d' -Kreiskantenfärbung von G .

Bemerkung 4.3 Aus obiger Überlegung folgt zum Beispiel, dass ein (k, d) -kantenfärbbarer Graph immer eine (k', d') -Kantenfärbung mit $\text{ggT}(k', d') = 1$ besitzt.

Wie der folgende Satz, die Übertragung eines Ergebnisses von Bondy und Hell [17] auf Kantenfärbung, zeigt, wird das Infimum in der Definition des kreischromatischen Index immer angenommen und kann daher durch das Minimum ersetzt werden.

Satz 4.1 Ist G ein Graph mit q Kanten, so gilt

$$\chi'_c(G) = \min\{k/d : G \text{ ist } (k, d)\text{-kantenfärbbar und } k \leq q\}.$$

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass ein (k, d) -kantenfärbbarer Graph G mit q Kanten immer eine (k', d') -Kantenfärbung mit $k'/d' \leq k/d$, $\text{ggT}(k', d') = 1$ und $k' \leq q$ besitzt. G sei (k, d) -kantenfärbt, wobei nach Bemerkung 4.3 angenommen werden kann, dass k und d teilerfremd sind, und es gelte $k > q$. Dann gibt es eine Farbe aus der Menge $\{0, \dots, k-1\}$, die an keiner Kante benutzt wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei d eine solche Farbe. Ist nun eine Kante mit der Farbe $2d$ gefärbt, so kann diese Kante mit $2d-1$ umgefärbt werden, ohne die Färbungsbedingungen zu verletzen. Auf diese Weise fährt man fort, alle Kanten umzufärben, die eine der Farben $3d, 4d, \dots, \alpha d$ enthalten, wobei α die kleinste natürliche Zahl ist, für die $\alpha d \equiv 1 \pmod{k}$ gilt. Da $\text{ggT}(k, d) = 1$ ist, existiert eine solche Zahl α . Es entsteht eine (k, d) -Kantenfärbung c , bei der keine Kante mit einer Farbe aus der Menge $S = \{d, 2d, \dots, \alpha d\}$ gefärbt ist. Es sei $k' = k - \alpha$. Die neue Färbung $c' : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{k'}$ sei definiert durch $c'(e) = c(e) - |\{i \in S : i < c(e)\}|$. Setzt man nun $\beta = (\alpha d - 1)/k$ und $d' = d - \beta$, so ist c' eine (k', d') -Kantenfärbung von G :

Sind e_1 und e_2 zwei benachbarte Kanten, so gilt $|c(e_1) - c(e_2)| \geq d$. Ohne Einschränkung sei $c(e_1) < c(e_2)$. Da $1 \in S$ gilt, sind weder e_1 noch e_2 mit 1 gefärbt. Damit liegen von den Farben $c(e_1), c(e_1) + 1, \dots, c(e_1) + d - 1$ in \mathbb{Z}_k genau β Farben in S ; also gilt $|c'(e_1) - c'(e_2)| \geq d - \beta = d'$. Ebenso liegen von den Farben $c(e_2), c(e_2) + 1, \dots, c(e_2) + d - 1$ in \mathbb{Z}_k genau β Farben in S ; wegen $|c(e_1) - c(e_2)| \leq k - d$ gilt somit auch $|c'(e_1) - c'(e_2)| \leq k - \alpha - (d - \beta) = k' - d'$. Also ist c' eine (k', d') -Kantenfärbung von G .

Des Weiteren gilt

$$\frac{k'}{d'} = \frac{k - \alpha}{d - \beta} = \frac{k(k - \alpha)}{d(k - \alpha) + 1} < \frac{k}{d}.$$

Ist bei einer (k, d) -Kantenfärbung von G also $k > q$, so gibt es eine (k', d') -Kantenfärbung von G mit $k'/d' < k/d$. Da die Menge

$$\{k/d : G \text{ ist } (k, d)\text{-kantenfärbbar, } \text{ggT}(k, d) = 1 \text{ und } k < q\}$$

endlich ist, kann das Infimum in der Definition des kreischromatischen Index durch das Minimum ersetzt werden. \square

Der kreischromatische Index $\chi'_c(G)$ ist somit immer rational.

Durch geeignete Abschätzung nach unten erhält man folgende Schranken für den kreischromatischen Index, die auch bei Moser [86] angegeben werden:

Satz 4.2 *Für jeden Graph G gilt $\chi'(G) - 1 < \chi'_c(G) \leq \chi'(G)$ und $\chi'_c(G) \geq \Delta(G)$.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.1 gilt $\chi'_c(G) \leq \chi'(G)$ für jeden Graph G .

Zunächst wird $\chi'_c(G) > \chi'(G) - 1$ gezeigt. Angenommen, es gibt eine (k, d) -Kantenfärbung c von G mit $k/d \leq \chi'(G) - 1$. Es sei $\text{ggT}(k, d) = 1$. Definiert man eine Färbung $c'(e_i) = \lfloor c(e_i)/d \rfloor$ für alle Kanten $e_i \in E(G)$, so bildet c' die Kanten von G auf die Menge $S = \{0, \dots, \lfloor (k-1)/d \rfloor\}$ ab. Da $|S| \leq \chi'(G) - 1$ und für je zwei benachbarte Kanten e_i und e_j außerdem $|c'(e_i) - c'(e_j)| \geq 1$ gilt, ist c' eine $(\chi'(G) - 1)$ -Kantenfärbung von G , im Widerspruch zur Definition des chromatischen Index $\chi'(G)$. Also gilt $\chi'_c(G) > \chi'(G) - 1$.

Nun folgt der Beweis für $\chi'_c(G) \geq \Delta(G)$. Angenommen, G sei (k, d) -kantenfärbbar mit $k/d < \Delta(G) = \Delta$. Dann liegen die Werte $c(e_i)$ einer (k, d) -Kantenfärbung $c : E(G) \rightarrow [0, k)$ von Δ paarweise benachbarten Kanten e_1, \dots, e_Δ alle in dem Intervall $[0, k)$. Somit gibt es zwei benachbarte Kanten e_i, e_j mit $|c(e_i) - c(e_j)| \leq k/\Delta < d$. Das widerspricht der Definition einer (k, d) -Kantenfärbung; also gilt $\chi'_c(G) \geq \Delta$. \square

Wie in Kapitel 2 dargestellt, gilt $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ für jeden Graph G (Satz 2.3 von Vizing), und man nennt G einen Klasse-1-Graph beziehungsweise einen Klasse-2-Graph, wenn $\chi'(G) = \Delta(G)$ beziehungsweise $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ gilt. Somit folgt aus Satz 4.2 unmittelbar Korollar 4.1:

Korollar 4.1 *Ist G ein Klasse-1-Graph, so gilt $\chi'_c(G) = \Delta$; ist G dagegen ein Klasse-2-Graph, so gilt $\Delta < \chi'_c(G) \leq \Delta + 1$.*

Für Klasse-2-Graphen können die Schranken aus Korollar 4.1 noch verbessert werden. Dazu wird die folgende Überlegung angewandt, die auch für weitere Ergebnisse hilfreich ist.

Bemerkung 4.4 Ist c eine k/d -Kreiskantenfärbung eines Graphen G der Größe q und hat G die Kantenunabhängigkeitszahl α' , so dürfen sich die Intervalle $c(e_i)$ der Kanten $e_i, i = 1, \dots, q$ für jeweils höchstens α' Kanten e_i paarweise überschneiden. Da die Intervalle alle die Länge 1 haben, gilt $k/d \geq q/\alpha'$.

Satz 4.3 Ist G ein Klasse-2-Graph, so gilt entweder $\chi'_c(G) = \Delta(G) + 1$ oder

$$\Delta(G) + \frac{1}{\alpha'(G)} \leq \chi'_c(G) \leq \Delta(G) + \frac{\alpha'(G) - 1}{\alpha'(G)},$$

wobei $\alpha'(G)$ die Kantenunabhängigkeitszahl von G ist.

Beweis. Nach Satz 4.1 kann für eine k/d -Kreiskantenfärbung von G immer $k \leq q$ angenommen werden; mit Bemerkung 4.4 folgt somit $d \leq k\alpha'(G)/q \leq \alpha'(G)$. Also ist der kleinstmögliche kreischromatische Index eines Graphen G der Klasse 2 mit Kantenunabhängigkeitszahl α' gleich $\Delta + 1/\alpha'$ und der größtmögliche kreischromatische Index eines Graphen G , für den $\chi'_c(G) < \chi'(G) = \Delta + 1$ gilt, gleich $\Delta + 1 - 1/\alpha' = \Delta + (\alpha' - 1)/\alpha'$. \square

4.1.2 Exakte Werte für den kreischromatischen Index

Für Klasse-1-Graphen ist der kreischromatische Index nach Korollar 4.1 bereits bekannt. Im Folgenden soll er für einige Klasse-2-Graphen bestimmt werden.

Kreise

Zunächst wird in Satz 4.4 der kreischromatische Index ungerader Kreise bestimmt. In der Knotenfärbung wird die kreischromatische Zahl ungerader Kreise zum Beispiel bei Vince [98] ermittelt, und da für einen Kreis C_p immer $L(C_p) \cong C_p$ gilt, kann das Ergebnis auf Kreiskantenfärbung übertragen werden; es lässt sich aber auch wie hier ganz direkt beweisen.

Satz 4.4 Ist $n \geq 1$, so gilt $\chi'_c(C_{2n+1}) = 2 + 1/n$.

Beweis. Da ein ungerader Kreis C_{2n+1} nicht 2-kantenfärbbar ist und Kantenunabhängigkeitszahl $\alpha' = n$ besitzt, gilt nach Bemerkung 4.4 für den kreischromatischen Index $\chi'_c(C_{2n+1}) \geq 2 + 1/n$.

Es bleibt zu zeigen, dass C_{2n+1} eine $(2n+1, n)$ -Kantenfärbung besitzt. Die Kanten von C_{2n+1} seien im Uhrzeigersinn mit e_0, e_1, \dots, e_{2n} durchnummeriert. Nun färbt man für $i = 0, \dots, 2n$ die Kante e_i mit der Farbe $c(e_i) \equiv ni \pmod{2n+1}$. Für $i = 0, \dots, 2n-1$ gilt dann $|c(e_{i+1}) - c(e_i)| \equiv n$ oder $n+1 \pmod{2n+1}$, und darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} |c(e_{2n}) - c(e_0)| &= c(e_{2n}) - c(e_0) = 2n^2 = (n-1)(2n+1) + (n+1) \\ &\equiv n+1 \pmod{2n+1}. \end{aligned}$$

Damit ist der Graph zulässig $(2n+1, n)$ -kantengefärbt. \square

Vollständige Graphen

Bemerkung 4.4 kann auch benutzt werden, um den kreischromatischen Index vollständiger Graphen ungerader Ordnung zu bestimmen. Da vollständige Graphen gerader Ordnung zur Klasse 1 gehören, ergibt sich der folgende Satz.

Satz 4.5 Für vollständige Graphen K_p gilt $\chi'_c(K_p) = \chi'(K_p)$.

Beweis. Ist p gerade, so ist K_p ein Klasse-1-Graph und die Aussage folgt aus Korollar 4.1.

Es sei also p ungerade. Dann hat der Graph K_p genau $q = p(p-1)/2$ Kanten und Kantenunabhängigkeitszahl $\alpha' = (p-1)/2$. Laut Bemerkung 4.4 gilt demnach $\chi'_c(K_p) \geq p = \Delta(K_p) + 1$ und damit $\chi'_c(K_p) = \Delta(K_p) + 1 = \chi'(K_p)$. \square

Der Petersen-Graph

Schließlich soll noch für einen einzelnen Graph der kreischromatische Index bestimmt werden: Für den Petersen-Graph P , der, wie in Abschnitt 2.1.2 erwähnt, ein Snark ist — und zwar der Snark kleinster Ordnung.

Satz 4.6 Für den Petersen-Graph P gilt $\chi'_c(P) = 11/3 = \Delta(P) + 2/3$.

Beweis. Abbildung 4.1 zeigt eine $(11, 3)$ -Kantenfärbung des Petersen-Graphen, die mittels eines Computerprogrammes von Wellmann [105] berechnet wurde; für P gilt also $\chi'_c(P) \leq 11/3$.

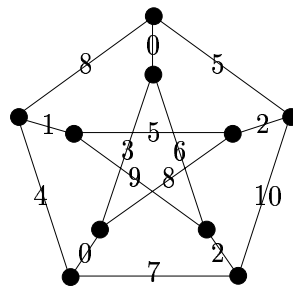


Abbildung 4.1: $(11, 3)$ -Kantenfärbung von P .

Da die größte rationale Zahl k/d mit $k/d < 11/3$, $d \leq \alpha'(P) = 5$ und $k \leq |E(P)| = 15$ die Zahl $7/2$ ist, muss nach Satz 4.1 und Korollar 4.1 zur Vervollständigung des Beweises nur noch gezeigt werden, dass P nicht $(7, 2)$ -kantenfärbbar ist.

Angenommen, P sei $(7, 2)$ -kantengefärbt. Bezeichnet man mit S_i die Menge der Farben i und $i + 1$ (modulo 7), so ist die Anzahl der Kanten, die mit einer Farbe aus der Menge S_i gefärbt sind, im Durchschnitt für jedes $i \in \{0, \dots, 6\}$ gleich $2|E(P)|/7 = 4 + \frac{2}{7}$. Wegen $\alpha'(P) = 5$ muss es somit mindestens zwei Farbmengen S_i, S_j geben, mit deren Farben genau 5 Kanten von P gefärbt sind. Diese maximal unabhängigen Kantenmengen seien mit E_i beziehungsweise E_j benannt. Im Petersen-Graph gibt es genau sechs verschiedene maximal unabhängige Kantenmengen, die — bezogen auf die Darstellung von Abbildung 4.1 — entweder aus den fünf Speichen des Petersen-Graphen oder aus je zwei Kanten des Außen- und des Innenkreises und einer Speiche bestehen (siehe Abbildung 4.2).

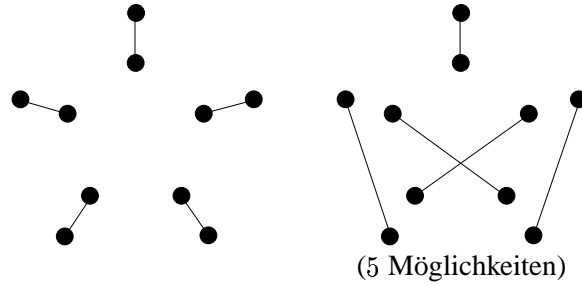


Abbildung 4.2: Maximale unabhängige Kantenmengen von P .

Da je zwei maximale unabhängige Kantenmengen im Petersen-Graph mindestens eine Kante gemeinsam haben, muss $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ gelten. Ohne Einschränkung sei $j = i + 1$, also $S_i = \{i, i + 1\}$ und $S_j = \{i + 1, i + 2\}$. Wie in Abbildung 4.3 zu sehen, ergeben sich drei Möglichkeiten für den von $E_i \cup E_j$ induzierten Graph. Die Kanten von E_i sind in der Abbildung als durchgezogene und die von E_j als gestrichelte Linien dargestellt.

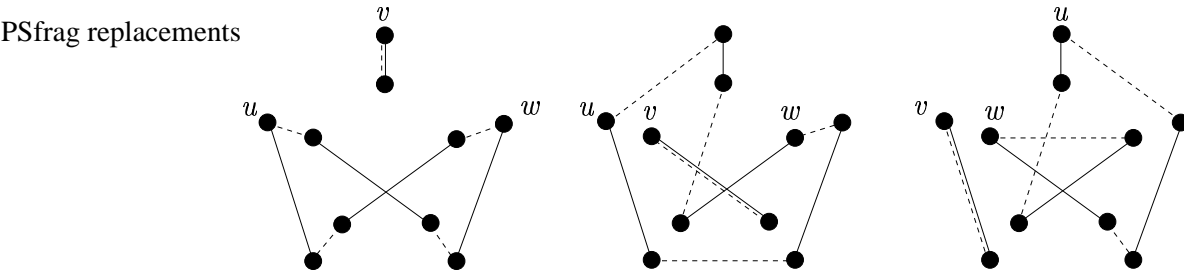


Abbildung 4.3: Drei mögliche Fälle des von $E_i \cup E_j$ induzierte Graphen.

In Abbildung 4.3 ist die Kante, die sowohl zu E_i als auch zu E_j gehört, jeweils mit der Farbe $i + 1$ gefärbt, während von den anderen Kanten die zu E_j gehörenden die Farbe $i + 2$ und die zu E_i gehörenden die Farbe i haben. In jedem Fall findet man

zwei benachbarte Kanten uv und vw in P , die beide sowohl zu mit i als auch zu mit $i + 2$ gefärbten Kanten benachbart sind (siehe Abbildung 4.3). Damit müssen die benachbarten Kanten uv und vw wegen $d = 2$ jeweils mit einer der beiden Farben $i + 4$ und $i + 5$ (modulo 7) gefärbt sein, was nicht möglich ist.

Somit gilt $\chi'_c(P) > 7/2$ und daher $\chi'_c(P) = 11/3$. \square

4.1.3 Der kreischromatische Index aller Klasse-2-Graphen der Ordnung $p \leq 7$

In diesem Abschnitt wird der Wert $\chi'_c(G)$ aller Klasse-2-Graphen G der Ordnung $p \leq 7$ angegeben; darüber hinaus wird ein Ergebnis über den kreischromatischen Index bestimmter kritischer Graphen bewiesen, die in Kapitel 3 definiert sind (Definition 3.1).

Da jeder Klasse-2-Graph nach Satz 3.1 einen kritischen Teilgraph mit gleichem Maximalgrad enthält, entsteht die Menge der Klasse-2-Graphen einer gegebenen Knotenzahl p , indem Kanten beziehungsweise Knoten und Kanten in alle kritischen Graphen mit gleichem Maximalgrad und Knotenzahl $\leq p$ eingefügt werden, ohne den Maximalgrad zu erhöhen. Eine Liste aller kritischen Graphen der Knotenzahl $p \leq 7$ ist zum Beispiel bei Fiorini und Wilson [44] zu finden.

Unter Zuhilfenahme des bereits in Abschnitt 4.1.2 erwähnten Computerprogrammes von Wellmann [105] wurden alle Klasse-2-Graphen mit bis zu 7 Knoten bezüglich ihres kreischromatischen Index untersucht. Da das Programm für Knotenfärbungen konzipiert ist, wurde dazu jeweils der Kantengraph des zu untersuchenden Graphen eingegeben. Das Ergebnis ist in den folgenden Abbildungen 4.4 bis 4.6 dargestellt; die Zahl unterhalb eines Graphen gibt jeweils den dazugehörigen kreischromatischen Index an. Die kritischen Graphen sind darüber hinaus mit einem Stern gekennzeichnet. In allen Fällen, in denen für einen Graph G der Wert $\chi'_c(G)$ kleiner als $\chi'(G)$ ist, ist eine mögliche (k, d) -Kantenfärbung mit $k/d = \chi'_c(G)$ angegeben.

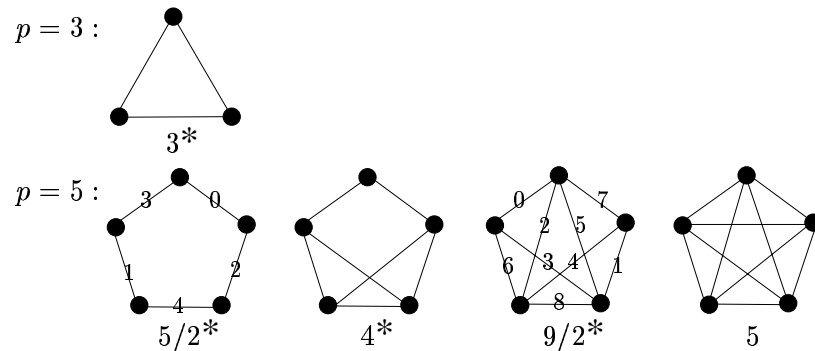
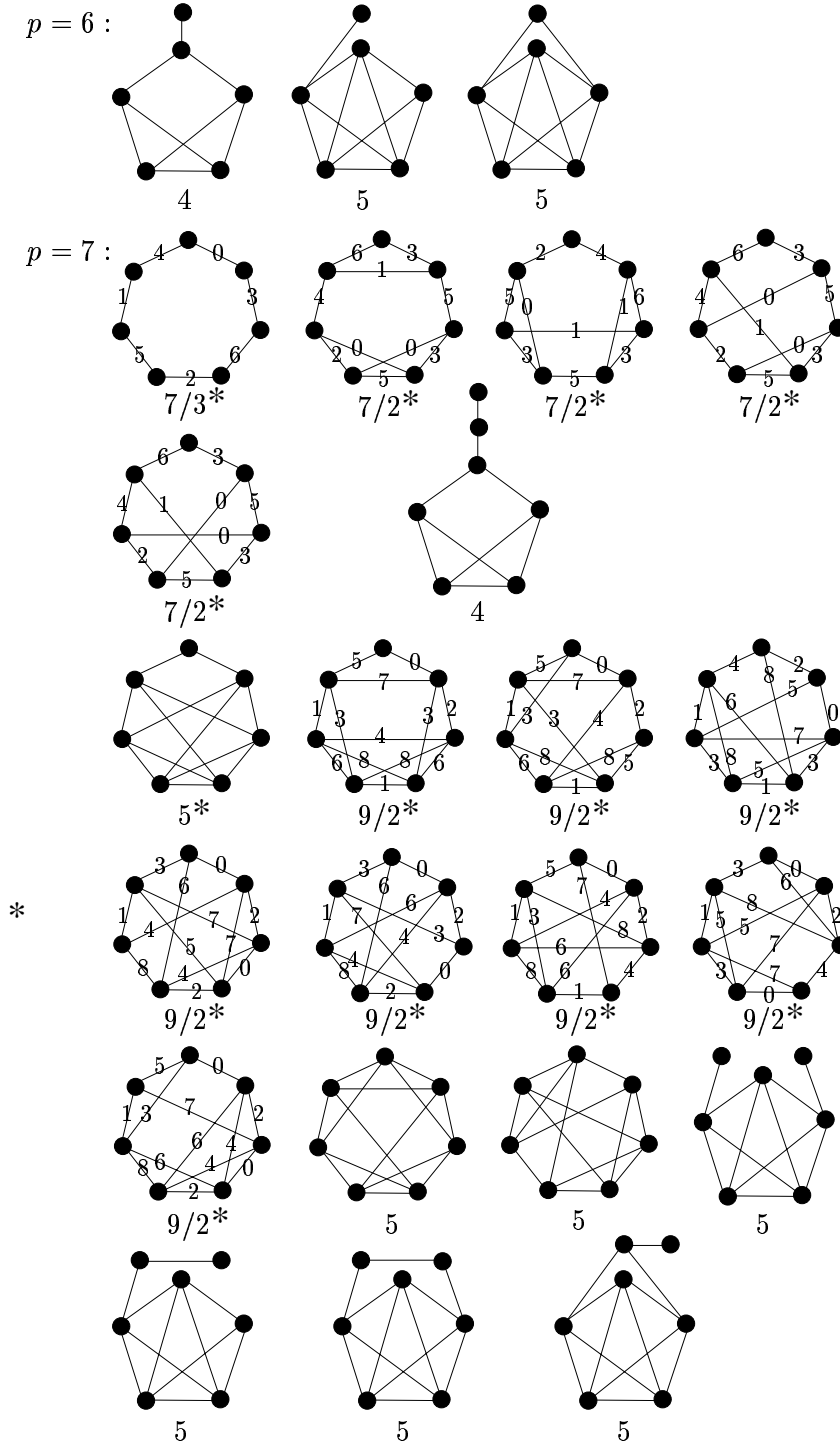
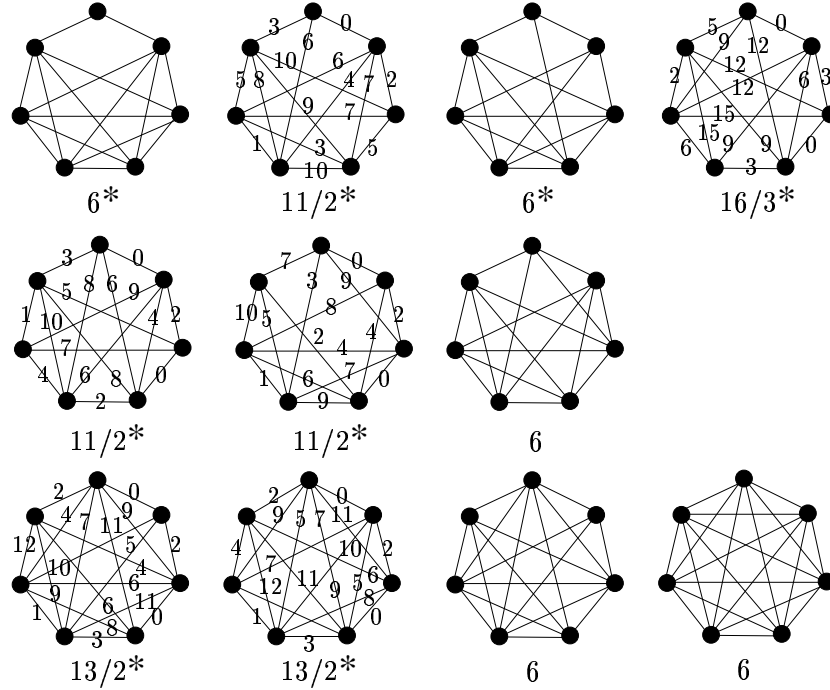


Abbildung 4.4: $\chi'_c(G)$ von Klasse-2-Graphen G mit $p \leq 5$


 Abbildung 4.5: $\chi'_c(G)$ von Klasse-2-Graphen G mit $p = 6$ bzw. $p = 7$ und $\Delta \leq 4$.


 Abbildung 4.6: $\chi'_c(G)$ von Klasse-2-Graphen G mit $p = 7$ und $\Delta \geq 5$.

Es stellt sich die Frage, ob man zumindest für kritische Graphen eine Regelmäßigkeit in Bezug auf den kreischromatischen Index finden kann. In Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse für kritische Graphen mit bis zu sieben Knoten noch einmal zusammengefasst. Dabei wird der Begriff der Gradfolge eines Graphen benutzt, der in Kapitel 3 definiert ist (siehe Seite 42).

Bisher ist es jedoch nur für eine spezielle Klasse von kritischen Graphen gelungen, ein allgemeines Ergebnis zur Kreiskantenfärbung zu formulieren. Dies wird im folgenden Satz dargestellt.

Satz 4.7 *Ist G ein kritischer Graph der Ordnung $p \geq 7$ mit Gradfolge $2^1 3^{p-1}$, so hat G eine $(7, 2)$ -Kantenfärbung.*

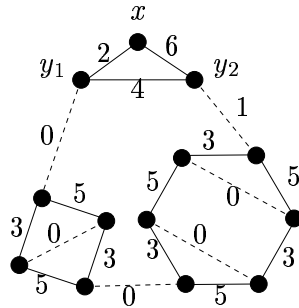
Beweis. Aufgrund der Gradfolge von G ist p ungerade. Es sei x der Knoten vom Grad 2 in G , und y_1, y_2 seien die beiden Nachbarknoten von x . Da G kritisch ist, muss der Graph $G - x$ eine 3-Kantenfärbung besitzen. Die Kantenanzahl von $G - x$ beträgt $(3p - 5)/2$; da nach Überlegungen in Kapitel 2 (Seite 12) $\alpha'(G) \leq (p - 1)/2$ gilt, gibt es also mindestens zwei Farbklassen der 3-Kantenfärbung von $G - x$, in der genau $(p - 1)/2$ Kanten liegen. Es sei S eine solche Farbklassse. Die Kantenmenge S bildet in $G - x$ einen 1-Faktor. Somit ist der Graph $G - x - S$ ein 2-kantengefärbter Graph der Gradfolge $1^2 2^{p-3}$, in dem genau die Knoten y_1 und y_2 den Grad 1 haben. Der Graph $G - S$ besteht somit aus einer Menge von

$ V(G) $	$\Delta(G)$	Gradfolge	# nichtisom. Graphen	$\chi'_c(G)$
3	2	2^3	1	3
5	2	2^5	1	$5/2$
	3	$2^1 3^4$	1	4
	4	$3^2 4^3$	1	$9/2$
7	2	2^7	1	$7/3$
	3	$2^1 3^6$	4	je $7/2$
		$2^1 4^6$	2	einmal 5, einmal $9/2$
		$3^2 4^5$	7	je $9/2$
	5	$2^1 5^6$	1	6
		$3^1 4^1 5^5$	2	einmal 6, einmal $11/2$
		$4^3 5^4$	3	zweimal $11/2$, einmal $16/3$
	6	$4^1 5^2 6^4$	1	$13/2$
		$5^2 6^5$	1	$13/2$

 Tabelle 4.1: $\chi'_c(G)$ für kritische Graphen G der Ordnung $p \leq 7$.

knotendisjunkten Kreisen, von denen wegen der ungeraden Ordnung von G und der 2-Kantenfärbung von $G - x - S$ nur der Kreis, auf dem x liegt, ungerade Ordnung hat. Dieser ungerade Kreis sei mit C benannt.

Gilt $|V(C)| = 3$, so sind y_1 und y_2 benachbart; der Graph G hat somit eine Form wie zum Beispiel in Abbildung 4.7 dargestellt (gestrichelte Kanten gehören zur Kantenmenge S).


 Abbildung 4.7: Ein Beispiel für Graph G im Fall $|V(C)| = 3$.

Der Graph kann folgendermaßen gefärbt werden: Die Kante xy_1 erhält die Farbe 2, die Kante xy_2 die Farbe 6 und y_1y_2 die Farbe 4. Die verbleibende von y_1 beziehungsweise y_2 ausgehende Kante der Menge S wird mit 0 beziehungsweise 1 gefärbt, während die auf den geraden Kreisen liegenden Kanten abwechselnd die Farben 3 und 5 erhalten. Die noch ungefärbten Kanten der Menge S (innerhalb der Kreise) können nun alle mit der Farbe 0 gefärbt werden, und es ergibt sich eine

(7, 2)-Kantenfärbung von G .

Im Folgenden wird gezeigt, dass der ungerade Kreis C für $|V(C)| \geq 5$ immer einen Weg $P_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit der Eigenschaft enthält, dass für alle $i, j = 1, \dots, 4$ mit $i \neq j$ gilt $v_i v_j \notin E(G) \setminus E(C)$.

Ist $|V(C)| = 5$, so sei u_1 beziehungsweise u_2 der Nachbarknoten von y_1 beziehungsweise y_2 auf C . Wegen der Voraussetzung $|V(G)| \geq 7$ und der Gradfolge $2^1 3^{p-1}$ von G kann nicht gleichzeitig $y_1 \sim u_2$ als auch $y_2 \sim u_1$ gelten; ohne Einschränkung sei y_1 nicht zu u_2 adjazent. Dann bilden die Knoten x, y_1, u_1 und u_2 einen Weg P_4 auf C mit der oben beschriebenen Eigenschaft (siehe Abbildung 4.8).

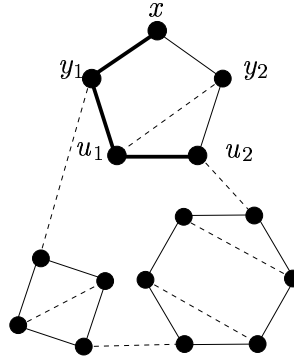


Abbildung 4.8: Ein Beispiel für Graph G im Fall $|V(C)| = 5$.

Es sei nun $|V(C)| \geq 7$. Für $i = 1, 2$ sei mit u_i der zweite Nachbarknoten von y_i auf C und mit w_i der weitere Nachbarknoten von u_i auf C benannt. Gilt $y_1 y_2 \in E(G)$ oder $y_1 u_2 \in E(G)$, so können die auf C aufeinanderfolgenden Knoten x, y_1, u_1 und w_1 aufgrund der Gradfolge $2^1 3^{p-1}$ von G durch keine weitere Kante untereinander benachbart sein (siehe Abbildung 4.9, linkes und mittleres Bild).

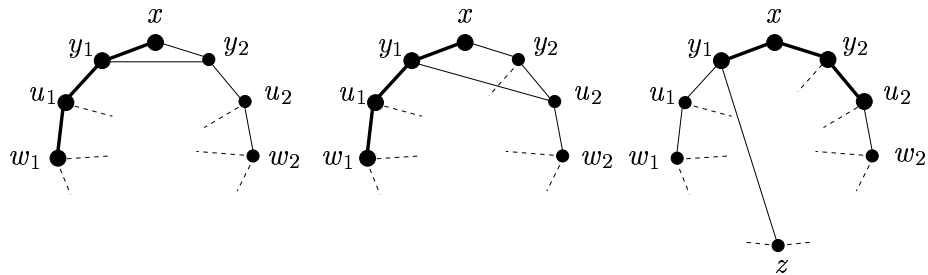


Abbildung 4.9: Der gesuchte, auf C liegende Weg P_4 .

Ist dagegen y_1 außer zu x und zu u_1 zu einem Knoten $z \neq y_2, u_2$ benachbart, so können die Knoten y_1, x, y_2 und u_2 durch keine weitere, nicht auf C liegende

Kante benachbart sein (siehe Abbildung 4.9, rechtes Bild). In jedem Fall erhält man also einen auf C liegenden Weg P_4 mit der oben beschriebenen Eigenschaft.

Es seien nun v_1, v_2, v_3 und v_4 vier auf C aufeinanderfolgende Knoten, für die $v_i v_j \notin E(G) \setminus E(C)$ gilt für $i, j = 1, \dots, 4$. Der Graph G kann folgendermaßen $(7, 2)$ -kantengefärbt werden: Jede zu v_1 oder v_2 inzidente, nicht auf C liegende Kante wird mit der Farbe 0 gefärbt; alle zu v_3 oder v_4 benachbarten Kanten, die nicht zu C gehören, erhalten dagegen die Farbe 1. Alle noch ungefärbten Kanten der Menge S werden mit der Farbe 0 gefärbt. Wählt man nun für $v_1 v_2$ die Farbe 2, für $v_2 v_3$ die Farbe 4 und für $v_3 v_4$ die Farbe 6, so können die Kanten der geraden Kreise aus $G - S$ sowie die gerade Anzahl verbleibender Kanten von C abwechselnd mit den Farben 3 und 5 gefärbt werden. Auf diese Weise erhält man eine $(7, 2)$ -Kantenfärbung von G . \square

4.2 Kreistotalfärbung

Analog zur Übertragung der Kreisfärbung auf Kantenfärbung wird nun die Übertragung auf die in Kapitel 2 definierte Totalfärbung untersucht. In den meisten Fällen sind die Beweismethoden sehr ähnlich. Erste Ergebnisse wurden von Hackmann und Kemnitz [56] zur Veröffentlichung eingereicht.

Definition 4.3 *Es seien $k, d \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2d$. Eine (k, d) -Totalfärbung eines Graphen G ist eine Abbildung $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_k$, so dass für je zwei benachbarte Elemente $x_i, x_j \in V(G) \cup E(G)$ gilt $d \leq |c(x_i) - c(x_j)| \leq k - d$. Der Graph G ist (k, d) -totalfärbbar, wenn es eine (k, d) -Totalfärbung von G gibt, und die kreistotalchromatische Zahl ist definiert als $\chi_c''(G) = \inf\{k/d : G \text{ ist } (k, d)\text{-totalfärbbar}\}$.*

Für $d = 1$ entspricht die (k, d) -Totalfärbung der in Definition 2.8 definierten k -Totalfärbung eines Graphen, so dass $\chi_c''(G) \leq \chi''(G)$ gilt.

Auch für die kreistotalchromatische Zahl lässt sich eine zweite, äquivalente Definition angeben.

Definition 4.4 *Es sei C ein Kreis der Länge r in \mathbb{R}^2 . Eine r -Kreistotalfärbung eines Graphen G ist eine Abbildung c , die jedem Knoten und jeder Kante e von G ein offenes Kreisintervall $c(e)$ der Länge 1 auf C so zuordnet, dass sich die Intervalle benachbarter Elemente aus $V(G) \cup E(G)$ nicht überschneiden. Besitzt G eine r -Kreistotalfärbung, so nennt man den Graph r -kreistotalfärbbar. Die kreistotalchromatische Zahl $\chi_c''(G)$ kann nun definiert werden als Infimum aller Zahlen $r \in \mathbb{R}$, für die der Graph r -kreistotalfärbbar ist.*

Analog zu Bemerkung 4.2 kann gezeigt werden, dass die Definitionen 4.3 und 4.4 für die kreistotalchromatische Zahl äquivalent sind:

Es sei c eine (k, d) -Totalfärbung eines Graphen G . Nun sei c' eine Abbildung von $V(G) \cup E(G)$ auf einen Kreis der Länge k/d , die jedem Element $x \in V(G) \cup E(G)$ das offene Kreisintervall $(c(x)/d, c(x)/d + 1)$ zuordnet. Dann hat jedes Intervall $c'(x)$ die Länge 1 und die Intervalle benachbarter Elemente überschneiden sich nicht.

Ebenso entspricht jeder Kreistotalfärbung c' auf einem Kreis mit rationaler Länge k/d eine (k, d) -Totalfärbung c : Ist c' eine k/d -Kreistotalfärbung, so definiert man $c(x) = \lfloor c'_*(x)d \rfloor$ für jedes Element $x \in V(G) \cup E(G)$, wobei $c'_*(x)$ der Ausgangspunkt des Abschlusses des Intervalls $c'(x)$ ist, wenn C im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Somit gilt $d \leq |c(x_i) - c(x_j)| \leq k - d$ für je zwei benachbarte Elemente x_i und x_j .

4.2.1 Eigenschaften der kreistotalchromatischen Zahl

Auch für die Kreistotalfärbung gilt offensichtlich, dass ein k/d -kreistotalfärbbarer Graph mit $k/d \leq k'/d'$ für natürliche Zahlen k, d, k' und d' immer auch k'/d' -kreistotalfärbbar ist. Somit hat jeder (k, d) -totalfärbbare Graph eine (k', d') -Totalfärbung mit $k'/d' = k/d$ und $\text{ggT}(k', d') = 1$.

Satz 4.1 lässt sich ebenfalls ohne Probleme auf Totalfärbungen übertragen; der Beweis verläuft ganz analog. Möglich ist jedoch auch ein Beweis über den Totalgraphen von G , der das entsprechende Ergebnis für Knotenfärbungen benutzt. Dieser Beweis ist hier angegeben.

Satz 4.8 *Ist G ein Graph mit p Knoten und q Kanten, so gilt*

$$\chi_c''(G) = \min\{k/d : G \text{ ist } (k, d)\text{-totalfärbbar und } k \leq p + q\}.$$

Beweis. Es sei $G_t = T(G)$ der Totalgraph von G . Dann gilt $|V(G_t)| = p + q$. Nach Bondy und Hell [17] gilt für die kreischromatische Zahl $\chi_c(H)$ eines Graphen mit p_H Knoten

$$\chi_c(H) = \min\{k/d : H \text{ ist } (k, d)\text{-färbbar und } k \leq p\};$$

angewandt auf den Graph G_t ergibt sich die Behauptung. □

Auch die kreistotalchromatische Zahl $\chi_c''(G)$ ist somit immer rational.

Wie bereits bemerkt, gilt für die totalchromatische Zahl $\chi_c''(G) \leq \chi''(G)$ für jeden Graph G . In Kapitel 2 wurde die totalchromatische Vermutung vorgestellt (Vermutung 2.3), nach der alle Graphen in die Typen 1 und 2 eingeteilt werden können. Satz 4.9 zeigt, dass $\chi_c''(G) = \chi''(G)$ für alle Typ-1-Graphen G gilt.

Satz 4.9 *Für alle Graphen G gilt $\chi''(G) - 1 < \chi_c''(G) \leq \chi''(G)$; ist G ein Typ-1-Graph, so gilt $\chi_c''(G) = \Delta + 1$.*

Beweis. Es sei $\Delta(G) = \Delta$. Wegen $\chi_c''(G) \leq \chi''(G)$ gilt $\chi_c''(G) \leq \Delta + 1$, falls G vom Typ 1 ist.

Zunächst wird nun $\chi_c''(G) \geq \Delta + 1$ gezeigt. Angenommen, G sei (k, d) -totalfärbbar mit $k/d < \Delta + 1$. Ist x_0 ein Knoten mit Maximalgrad und sind x_1, \dots, x_Δ die zu x_0 benachbarten Kanten, so liegen die Werte $c(x_i)$, $i = 0, \dots, \Delta$, einer (k, d) -Totalfärbung $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow [0, k)$ alle in dem Intervall $[0, k)$. Somit gibt es zwei benachbarte Elemente x_i, x_j mit $i, j \in \{0, \dots, \Delta\}$ und $|c(x_i) - c(x_j)| \leq k/\Delta < d$. Das widerspricht der Definition einer (k, d) -Totalfärbung; also gilt $\chi_c''(G) \geq \Delta + 1$ für alle Graphen G und somit $\chi_c''(G) = \Delta(G) + 1$, wenn G zu Typ 1 gehört.

Nun wird $\chi_c''(G) > \chi''(G) - 1$ bewiesen. Angenommen, es gibt eine (k, d) -Totalfärbung c von G mit $k/d \leq \chi''(G) - 1$. Ohne Einschränkung kann $(k, d) = 1$ angenommen werden. Definiert man eine Färbung $c'(x_i) = \lfloor c(x_i)/d \rfloor$ für alle Elemente $x_i \in V(G) \cup E(G)$, so bildet c' die Knoten und Kanten von G auf die Menge $S = \{0, \dots, \lfloor (k-1)/d \rfloor\}$ ab. Da $|S| \leq \chi''(G) - 1$ und für je zwei benachbarte Elemente x_i und x_j außerdem $|c'(x_i) - c'(x_j)| \geq 1$ gilt, ist c' eine $(\chi''(G) - 1)$ -Totalfärbung von G , im Widerspruch zur Definition von χ'' . Also gilt $\chi_c''(G) > \chi''(G) - 1$. \square

Für Typ-2-Graphen können die Schranken aus Satz 4.9 noch verbessert werden. Dazu wird eine zu Bemerkung 4.4 äquivalente Überlegung angestellt.

Bemerkung 4.5 Ist c eine k/d -Kreistotalfärbung eines Graphen G der Ordnung p und der Größe q und hat G die totale Unabhängigkeitszahl α'' , so dürfen sich die Intervalle $c(x_i)$ der Elemente $x_i \in V(G) \cup E(G)$, $i = 1, \dots, p + q$ für jeweils höchstens α'' Elemente x_i paarweise überschneiden. Da die Intervalle alle die Länge 1 haben, gilt $k/d \geq (p + q)/\alpha''$.

Satz 4.10 Ist G ein Typ-2-Graph, so gilt entweder $\chi_c''(G) = \Delta(G) + 2$ oder

$$\Delta(G) + 1 + \frac{1}{\alpha''(G)} \leq \chi_c''(G) \leq \Delta(G) + 1 + \frac{\alpha''(G) - 1}{\alpha''(G)},$$

wobei $\alpha''(G)$ die totale Unabhängigkeitszahl von G ist.

Beweis. Nach Satz 4.8 kann für eine k/d -Kreistotalfärbung von G immer $k \leq p + q$ angenommen werden; mit Bemerkung 4.5 folgt somit $d \leq k\alpha''(G)/(p + q) \leq \alpha''(G)$. Also liegen der kleinstmögliche beziehungsweise größtmögliche Wert für $\chi''(G)$ eines Graphen G vom Typ 2 mit totaler Unabhängigkeitszahl α'' bei $\Delta(G) + 1 + 1/\alpha''$ beziehungsweise bei $\Delta(G) + 2 - 1/\alpha'' = \Delta(G) + 1 + (\alpha'' - 1)/\alpha''$. \square

4.2.2 Exakte Werte für die kreistotalchromatische Zahl

Für Typ-1-Graphen ist die kreistotalchromatische Zahl nach Satz 4.9 bereits bekannt. Im Folgenden soll sie für einige Typ-2-Graphen bestimmt werden.

Kreise

Satz 4.11 Für jeden Kreis C_p mit $p \geq 3$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\chi_c''(C_p) = \begin{cases} 3 & \text{falls } p = 3n \\ 3 + \frac{1}{n} & \text{falls } p = 3n + 1 \\ 3 + \frac{1}{2n+1} & \text{falls } p = 3n + 2. \end{cases}$$

Beweis. Für $p = 3n$ ist C_p ein Typ-1-Graph und hat damit kreistotalchromatische Zahl $\chi_c''(C_p) = 3$.

Da $\alpha''(C_{3n+1}) = 2n$ und $\alpha''(C_{3n+2}) = 2n + 1$ gilt, folgt aus Bemerkung 4.5 jeweils $\chi_c''(C_{3n+1}) \geq 3 + 1/n$ beziehungsweise $\chi_c''(C_{3n+2}) \geq 3 + 1/(2n + 1)$. Es bleibt zu zeigen, dass C_{3n+1} eine $(3n + 1, n)$ -Totalfärbung und C_{3n+2} eine $(6n + 4, 2n + 1)$ -Totalfärbung hat.

Zunächst wird der Fall $p = 3n + 1$ betrachtet. Es seien $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{3n}, e_{3n}$ die Knoten und Kanten von C_{3n+1} , wenn man eine Darstellung des Kreises im Uhrzeigersinn durchläuft. Für $i = 0, \dots, 3n$ sei dem Knoten v_i die Farbe $c(v_i) \equiv (2i)n \pmod{3n + 1}$ und der Kante e_i die Farbe $c(e_i) \equiv (2i + 1)n \pmod{3n + 1}$ zugeordnet. Dann gilt für $i < 3n$

$$\begin{aligned} |c(v_{i+1}) - c(v_i)| &\equiv 2n \text{ oder } n + 1 \pmod{3n + 1}, \\ |c(e_{i+1}) - c(e_i)| &\equiv 2n \text{ oder } n + 1 \pmod{3n + 1}, \\ |c(v_{i+1}) - c(e_i)| &\equiv n \text{ oder } 2n + 1 \pmod{3n + 1} \end{aligned}$$

und für $i \leq 3n$

$$|c(e_i) - c(v_i)| \equiv n \text{ oder } 2n + 1 \pmod{3n + 1}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} |c(v_{3n}) - c(v_0)| &= c(v_{3n}) = 6n^2 = (2n - 1)(3n + 1) + n + 1 \\ &\equiv n + 1 \pmod{3n + 1}, \\ |c(e_{3n}) - c(v_0)| &= c(e_{3n}) = 6n^2 + n = (2n - 1)(3n + 1) + 2n + 1 \\ &\equiv 2n + 1 \pmod{3n + 1} \text{ und} \\ |c(e_{3n}) - c(e_0)| &= c(e_{3n}) - n \equiv n + 1 \pmod{3n + 1}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $n \leq |c(x_i) - c(x_j)| \leq 2n + 1$ für je zwei benachbarte Elemente $x_i, x_j \in V(C_{3n+1}) \cup E(C_{3n+1})$.

Nun sei $p = 3n + 2$, und $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{3n+1}, e_{3n+1}$ seien die Knoten und Kanten von C_{3n+2} , wiederum im Uhrzeigersinn benannt. Für $i = 0, \dots, 3n + 1$ erhalte der Knoten v_i die Farbe $c(v_i) \equiv 2i(2n + 1) \pmod{6n + 4}$ und die Kante e_i die Farbe $c(e_i) \equiv (2i + 1)(2n + 1) \pmod{6n + 4}$. Dann gilt für $i < 3n + 1$

$$\begin{aligned} |c(v_{i+1}) - c(v_i)| &\equiv 4n + 2 \text{ oder } 2n + 2 \pmod{6n + 4}, \\ |c(e_{i+1}) - c(e_i)| &\equiv 4n + 2 \text{ oder } 2n + 2 \pmod{6n + 4}, \\ |c(v_{i+1}) - c(e_i)| &\equiv 2n + 1 \text{ oder } 4n + 3 \pmod{6n + 4} \end{aligned}$$

und für $i \leq 3n + 1$

$$|c(e_i) - c(v_i)| \equiv 2n + 1 \text{ oder } 4n + 3 \text{ (modulo } 6n + 4).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} |c(v_{3n+1}) - c(v_0)| &= c(v_{3n+1}) = 12n^2 + 10n + 2 = 2n(6n + 4) + 2n + 2 \\ &\equiv 2n + 2 \text{ (modulo } 6n + 4), \\ |c(e_{3n+1}) - c(v_0)| &= c(e_{3n+1}) = 12n^2 + 12n + 3 = 2n(6n + 4) + 4n + 3 \\ &\equiv 4n + 3 \text{ (modulo } 6n + 4) \text{ und} \\ |c(e_{3n+1}) - c(e_0)| &= c(e_{3n+1}) - 2n + 1 \equiv 2n + 2 \text{ (modulo } 6n + 4). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $2n + 1 \leq |c(x_i) - c(x_j)| \leq 4n + 3$ für je zwei benachbarte Elemente $x_i, x_j \in V(C_{3n+2}) \cup E(C_{3n+2})$. \square

Bemerkung 4.6 Das Ergebnis von Satz 4.11 lässt sich auch auf andere Art beweisen. Dazu benutzt man die Tatsache, dass der Totalgraph eines Kreises mit p Knoten isomorph zum zirkulanten Graph $C_{2p}(1, 2)$ ist. Diese Graphen wurden bereits in Abschnitt 2.2.3 definiert.

Lih, Liu und Zhu [84] konnten beweisen, dass die kreischromatische Zahl eines zirkulanten Graphen $C_p(a_1, a_1 + 1, \dots, a_1 + n)$ immer gleich n/α ist, wenn α die Unabhängigkeitszahl des Graphen angibt. Für die Unabhängigkeitszahl α des Graphen $C_{2p}(1, 2)$ gilt $\alpha = \lfloor 2p/3 \rfloor$, also

$$\alpha = \begin{cases} 2k + 1 & \text{falls } p = 3k + 2 \\ 2k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich die Aussage von Satz 4.11.

Vollständige und vollständig r -partite Graphen

Für die Bestimmung der kreistotalchromatischen Zahl vollständiger und vollständig r -partiter Graphen kann Bemerkung 4.5 verwendet werden.

Satz 4.12 Für vollständige Graphen K_p gilt

$$\chi_c''(K_p) = \chi''(K_p).$$

Beweis. Ist p ungerade, so gehört K_p zu Typ 1. Ist p gerade, so gilt $\alpha''(K_p) = p/2$ und $|V(K_p) \cup E(K_p)| = p(p+1)/2$. Mit Bemerkung 4.5 ergibt sich $\chi_c''(K_p) \geq p + 1 = \Delta(K_p) + 2$. \square

Die gleichen Überlegungen führen zum folgenden Satz über die kreistotalchromatische Zahl bestimmter vollständig r -partiter Graphen.

Satz 4.13 *Ist G ein vollständig r -partiter Graph K_{n_1, \dots, n_r} mit $r \in \{2, 3, 4\}$ oder mit ungerader Ordnung oder ein balancierter vollständig r -partiter Graph der Form $K(r, n)$, so gilt*

$$\chi_c''(G) = \chi''(G).$$

Beweis. Ist G ein bipartiter Graph $K_{m,n}$ mit $m \neq n$ oder ein vollständig multipartiter Graph K_{n_1, \dots, n_r} mit ungerader Knotenzahl, so gehört G zu Typ 1 (Sätze 2.35 und 2.38). Zudem ist G nach Satz 2.40 vom Typ 1, wenn G ein nicht balancierter vollständig r -partiter Graph mit $r = 3$ oder $r = 4$ ist.

Die totalchromatische Zahl eines balancierten Graphen $K(r, n)$ ist nach Satz 2.39

$$\chi''(K(r, n)) = \begin{cases} \Delta(K(r, n)) + 2 & \text{falls } r = 2 \text{ oder} \\ & r \text{ gerade und } n \text{ ungerade} \\ \Delta(K(r, n)) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es müssen also nur noch Graphen $K(r, n)$ mit $r = 2$ beziehungsweise mit r gerade, $r \geq 4$ und n ungerade betrachtet werden.

In beiden Fällen ist rn gerade und es gilt $\alpha''(K(r, n)) = rn/2$ sowie

$$|V(K(r, n)) \cup E(K(r, n))| = rn + \frac{rn(r-1)n}{2}.$$

Aus Bemerkung 4.5 folgt somit $\chi_c''(K(r, n)) \geq rn - n + 2 = \Delta(K(r, n)) + 2$. \square

Offen ist somit noch der Fall, in dem G ein nicht-balancierter vollständig r -partiter Graph gerader Ordnung mit $r \geq 5$ ist. Für diese Graphen ist auch die totalchromatische Zahl noch nicht allgemein bestimmt (siehe Abschnitt 2.2.3).

Zirkulante Graphen

Zirkulante Graphen $C_p(a_1, \dots, a_r)$ der Ordnung p mit Distanzmenge $\{a_1, \dots, a_r\}$ wurden in Abschnitt 2.1.2 definiert (siehe Seite 16).

Bisher ist nur eine einzige unendliche Klasse von Graphen bestimmt worden, für die $\chi_c''(G) < \chi''(G)$ gilt, nämlich die Klasse der Kreise C_p mit $p \equiv 1$ oder 2 (modulo 3); wie bereits erwähnt, entsprechen Kreise der Klasse der zusammenhängenden zirkulanten Graphen mit Maximalgrad 2. In Abschnitt 2.2.3 wurde gezeigt, dass es auch unter den zirkulanten Graphen mit Maximalgrad 3 Graphen vom Typ 2 gibt, nämlich die Graphen $C_{2n}(a, n) \cong lC_{2m}(k, m)$ mit ungeradem k , wobei l der größte gemeinsame Teiler von a und n ist und $a = lk$, $n = lm$ gilt, sowie der Graph $C_{10}(2, 5)$ (Satz 2.44). Der folgende Satz zeigt, dass unter diesen die Graphen $lC_{2m}(k, m)$ mit $m \geq 4$ eine weitere unendliche Klasse von Graphen bilden, für die die kreistotalchromatische Zahl kleiner als die totalchromatische Zahl ist.

Satz 4.14 *Jeder 3-reguläre zirkulante Typ-2-Graph $C_{2lm}(lk, lm)$ mit teilerfremden k, m und $m \geq 4$ ist $(9, 2)$ -totalfärbbar.*

Beweis. Es sei G ein 3-regulärer zirkulanter Typ-2-Graph $C_{2lm}(lk, lm)$ mit teilerfremden k, m und $m \geq 4$. Da G vom Typ 2 ist, muss nach Satz 2.44 entweder k ungerade oder $G \cong C_{10}(2, 5)$ sein. Nach Lemma 2.43 gilt für einen zirkulanten Graph $G \cong lC_{2m}(k, m)$ mit ungeradem k immer $G \cong lC_{2m}(1, m)$; somit reicht es zu zeigen, dass alle Graphen $C_{2m}(1, m)$ mit $m \geq 4$ sowie der Graph $C_{10}(2, 5)$ eine $(9, 2)$ -Totalfärbung besitzen.

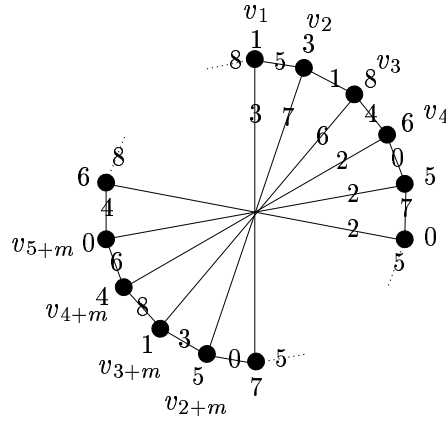
In einer Darstellung von $C_{2m}(1, m)$ mit $m \geq 4$ seien die Knoten kreisförmig angeordnet und im Uhrzeigersinn mit v_1, v_2, \dots, v_{2m} bezeichnet. Dabei sind die Knoten v_i und v_{i+m} für $i = 1, \dots, m$ jeweils durch eine Speiche $v_i v_{i+m}$ miteinander verbunden. In Abhängigkeit von der Restklasse von m modulo 3 werden drei Fälle zur Konstruktion einer $(9, 2)$ -Totalfärbung c des Graphen unterschieden.

- 1) $m = 3s$ mit $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Zunächst erhält der Knoten v_1 die Farbe 1. Des Weiteren sei

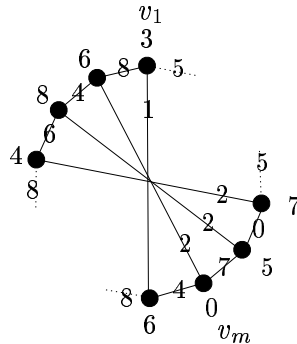
$$\begin{aligned} c(v_1 v_2) &= c(v_{2+m}) &&= 5, \\ c(v_2) &= c(v_{2+m} v_{3+m}) &&= 3, \\ c(v_2 v_3) &= c(v_{3+m}) &&= 1, \\ c(v_3) &= c(v_{3+m} v_{4+m}) &&= 8, \\ c(v_3 v_4) &= c(v_{4+m}) &&= 4, \\ c(v_4) &= c(v_{4+m} v_{5+m}) &&= 6 \text{ und} \\ c(v_4 v_5) &= c(v_{5+m}) &&= 0. \end{aligned}$$

Nun färbt man die $2(m-3) = 6s - 6$ Elemente $v_5, v_5 v_6, \dots, v_{1+m} v_{2+m}$ abwechselnd mit den Farben 5, 7, 0, 5, 7, \dots , 0. Die Farbfolge (5, 7, 0) wird dabei genau $(2s-2)$ -mal benötigt. Schließlich erhalten die $2(m-4) - 1 = 6s - 9$ Elemente $v_{5+m} v_{6+m}, v_{6+m}, \dots, v_{2m} v_1$ abwechselnd die Farben 4, 6, 8, 4, 6, \dots , 8, wobei die Farbfolge (4, 6, 8) genau $(2s-3)$ -mal benötigt wird. Die Speichen $v_1 v_{1+m}, v_2 v_{2+m}$ beziehungsweise $v_3 v_{3+m}$ werden mit den Farben 3, 7 beziehungsweise 6 gefärbt; für alle verbleibenden Speichen wird $c(v_i v_{i+m}) = 2$ gesetzt. In Abbildung 4.10 kann nachgeprüft werden, dass diese Färbung für den kleinstmöglichen Fall $s = 2$ eine zulässige $(9, 2)$ -Totalfärbung ergibt. Gilt $s > 2$, so vergrößert sich der Außenkreis des Graphen in der Abbildung an den beiden durch gepunktete Linien gekennzeichneten Stellen um jeweils $3s$ Knoten und die entsprechenden $3s$ Kanten, und diese Elemente sind fortlaufend mit den Farbfolgen (5, 7, 0) beziehungsweise (4, 6, 8) gefärbt. Somit gilt auch für die neu hinzukommenden Speichen $v_i v_{i+m}$ mit $6 < i < 1+m$, die alle mit der Farbe 2 gefärbt sind und deren Nachbarelemente alle eine Farbe aus der Menge $\{0, 4, 5, 6, 7, 8\}$ besitzen, die Ungleichung $2 \leq |c(x) - c(v_i v_{i+m})| \leq 7$ für jedes zu $v_i v_{i+m}$ benachbarte Element x , und die konstruierte $(9, 2)$ -Totalfärbung ist zulässig.

- 2) $m = 3s + 1$, $s \in \mathbb{N}$. Diesmal erhält der Knoten v_1 die Farbe 3. Nun werden die $2(m-1) = 6s$ Elemente $v_1 v_2, v_2, \dots, v_{m-1} v_m, v_m$ abwechselnd mit den


 Abbildung 4.10: $(9, 2)$ -Totalfärbung von $C_{6s}(1, 3s)$.

Farben 5, 7, 0, 5, 7, \dots , 0 gefärbt; die Farbfolge (5, 7, 0) wird dazu $2s$ -mal verwendet. Die $2m + 1 = 6s + 3$ Elemente $v_m v_{1+m}, v_{1+m}, \dots, v_{2m}, v_{2m} v_1$ färbt man abwechselnd mit den Farben 4, 6, 8, 4, 6, \dots , 8, wobei die Farbfolge (4, 6, 8) genau $(2s + 1)$ -mal benutzt wird. Schließlich wird $c(v_1 v_{1+m}) = 1$ gesetzt, und alle anderen Speichen $v_i v_{i+m}$ erhalten die Farbe 2. Anhand von Abbildung 4.11 lässt sich nachprüfen, dass diese Färbung für den kleinsten möglichen Fall $s = 1$ eine zulässige $(9, 2)$ -Totalfärbung ergibt. Gilt $s > 1$, so kommen in der Abbildung an den beiden durch gepunktete Linien markierten Stellen des Außenkreises jeweils $3(s - 1)$ Knoten und die entsprechenden $3(s - 1)$ Kanten hinzu, die fortlaufend mit der Farbfolge (5, 7, 0) beziehungsweise (4, 6, 8) gefärbt sind. Somit sind die Nachbarelemente der Speichen $v_i v_{i+m}$ mit $1 < i < m - 2$ alle mit Farben aus der Menge $\{0, 4, 5, 6, 7, 8\}$ gefärbt, und da diese Speichen jeweils die Farbe 2 besitzen, gilt wiederum $2 \leq |c(x) - c(v_i v_{i+m})| \leq 7$ für jedes zu $v_i v_{i+m}$ benachbarte Element x . Die angegebene $(9, 2)$ -Totalfärbung des Graphen ist somit zulässig.


 Abbildung 4.11: $(9, 2)$ -Totalfärbung von $C_{6s+2}(1, 3s + 1)$.

$$\begin{aligned} c(v_{2m}v_1) &= c(v_m) &&= 3, \\ c(v_1) &= c(v_mv_{1+m}) &&= 5, \\ c(v_1v_2) &= c(v_{1+m}) &&= 0, \\ c(v_2) &= c(v_{1+m}v_{2+m}) &&= 3, \\ c(v_2v_3) &= c(v_{2+m}) &&= 7 \text{ und} \\ c(v_3) &= c(v_{2+m}v_{3+m}) &&= 0. \end{aligned}$$

Die $2(m-3)-1 = 6s-3$ Elemente $v_3v_4, v_4, \dots, v_{m-1}v_m$ werden abwechselnd mit den Farben 4, 6, 8, 4, 6, \dots , 8 gefärbt, wobei die Farbfolge (4, 6, 8) genau $(2s-1)$ -mal durchlaufen wird; die $2(m-2)-1 = 6s-1$ Elemente $v_{3+m}, v_{3+m}v_{4+m}, \dots, v_{2m}$ dagegen erhalten abwechselnd die Farben 5, 7, 0, 5, 7, \dots , 0, 5, 7. Die Färbung der Speichen wird folgendermaßen gewählt: $c(v_{2m}v_m) = 1$, $c(v_1v_{1+m}) = 7$ und $c(v_2v_{2+m}) = 5$; alle anderen Speichen $v_i v_{i+m}$, $2 < i < m$, erhalten die Farbe 2. In Abbildung 4.12 lässt sich nachprüfen, dass auf diese Weise eine zulässige $(9, 2)$ -Totalfärbung entsteht, wenn $s = 1$ gilt. Ist $s > 1$, so wird der Außenkreis des in der Abbildung dargestellten Graphen an den beiden durch gepunktete Linien gekennzeichneten Stellen um jeweils $3(s-1)$ Knoten und die entsprechenden $3(s-1)$ Kanten erweitert, die fortlaufend mit den Farbfolgen (4, 6, 8) beziehungsweise (5, 7, 0) gefärbt sind. Da die Speichen $v_i v_{i+m}$ mit $4 < i < m$ alle mit der Farbe 2 gefärbt und nur zu Elementen x mit $c(x) \in \{0, 4, 5, 6, 7, 8\}$ benachbart sind, gilt auch hier $2 \leq |c(x) - c(v_i v_{i+m})| \leq 7$ für jedes zu $v_i v_{i+m}$ benachbarte Element x , und die angegebene $(9, 2)$ -Totalfärbung ist zulässig.

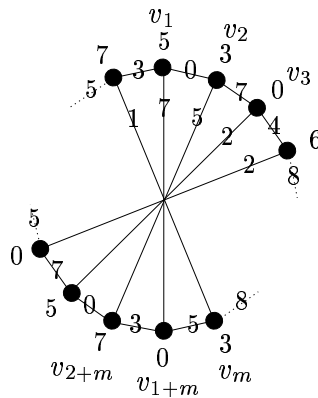


Abbildung 4.12: $(9, 2)$ -Totalfärbung von $C_{6s+4}(1, 3s + 2)$.

Somit haben für $m \geq 4$ alle Graphen $C_{2m}(1, m)$ und damit auch alle Graphen $lC_{2m}(k, m)$ mit ungeradem k eine $(9, 2)$ -Totalfärbung.

Abbildung 4.13 zeigt eine $(13, 3)$ -Totalfärbung des Graphen $C_{10}(2, 5)$. Da $13/3 < 9/2$ gilt, besitzt der Graph nach Überlegungen zu Beginn von Abschnitt 4.2.1 somit auch eine $(9, 2)$ -Totalfärbung. Dies vervollständigt den Beweis. \square

Bemerkung 4.7 Satz 4.14 liefert für allgemeine zirkulante Typ-2-Graphen G mit Maximalgrad 3 — mit den angegebenen Ausnahmen $m = 2$ und $m = 3$ — nur eine obere Schranke für die kreistotalchromatische Zahl, nämlich $\chi_c''(G) \leq 9/2$. Mit dem bereits erwähnten Computerprogramm von Wellmann [105] wurde für die drei Graphen kleinster Ordnung, also für die Graphen $C_8(1, 4)$, $C_{10}(1, 5)$ und $C_{10}(2, 5)$, der exakte Wert der kreistotalchromatischen Zahl ermittelt. In den ersten beiden Fällen entspricht dieser Wert tatsächlich der in Satz 4.14 bestimmten oberen Schranke $\chi_c''(G) = 9/2$, während sich im letzten Fall $\chi_c''(C_{10}(2, 5)) = 13/3$ ergibt. Eine $(13, 3)$ -Totalfärbung von $C_{10}(2, 5)$ ist in Abbildung 4.13 angegeben.

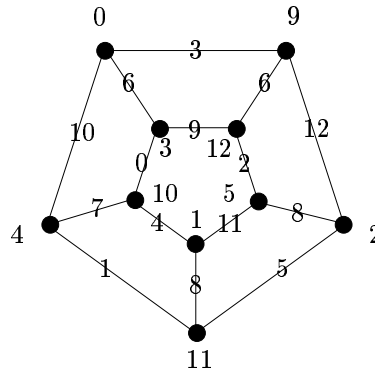


Abbildung 4.13: $(13, 3)$ -Totalfärbung von $C_{10}(2, 5)$.

Ist $G = lC_{2m}(k, m)$ mit $m = 2$ beziehungsweise $m = 3$, so ist G isomorph zu l Kopien des K_4 beziehungsweise des $K_{3,3}$ (Lemma 2.43). Nach den Sätzen 4.12 und 4.13 gilt in diesen beiden Fällen $\chi_c''(G) = \chi''(G) = 5$.

4.2.3 Die kreistotalchromatische Zahl aller Typ-2-Graphen der Ordnung $p \leq 7$

Analog zu Abschnitt 4.1.3 soll nun die kreistotalchromatische Zahl aller Typ-2-Graphen der Ordnung $p \leq 7$ angegeben werden.

Ein dem Satz 3.1 entsprechendes Ergebnis für Totalfärbung besagt, dass jeder Typ-2-Graph einen bezüglich Totalfärbung kritischen Teilgraph mit gleichem Maximalgrad enthält. Dabei heißt ein Typ-2-Graph *kritisch* in Bezug auf Totalfärbung, wenn sich seine totalchromatische Zahl bei Entfernen einer beliebigen Kante verringert. Somit entstehen alle Typ-2-Graphen einer gegebenen Knotenzahl p , indem Kanten beziehungsweise Knoten und Kanten in alle kritischen Graphen mit gleichem

Maximalgrad und Knotenzahl $\leq p$ eingefügt werden, ohne den Maximalgrad zu erhöhen. Eine Liste aller kritischen Graphen der Totalfärbung mit $p \leq 7$ Knoten ist bei Hamilton, Hilton und Hind [60] angegeben.

Wiederum mit Hilfe des Computerprogrammes von Wellmann [105] wurden alle Graphen vom Typ 2 mit bis zu 7 Knoten bezüglich ihrer kreistotalchromatischen Zahl untersucht, indem die kreischromatische Zahl des Totalgraphen errechnet wurde. Das Ergebnis ist in den Abbildungen 4.14 und 4.15 dargestellt; die Zahl unterhalb eines Graphen gibt jeweils die dazugehörige kreistotalchromatische Zahl an. Die bezüglich der Totalfärbung kritischen Graphen sind darüber hinaus mit einem Stern gekennzeichnet. In allen Fällen, in denen die kreistotalchromatische Zahl des Graphen G kleiner als seine totalchromatische Zahl ist, ist eine mögliche (k, d) -Totalfärbung mit $k/d = \chi_c''(G)$ angegeben.

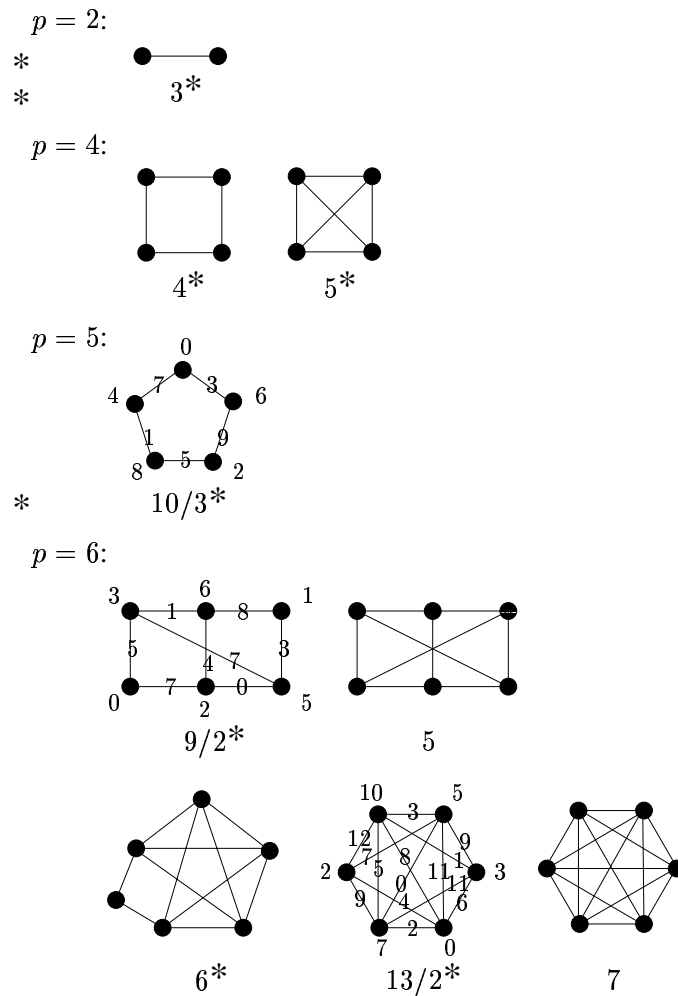


Abbildung 4.14: Kreistotalchromatische Zahl von Typ-2-Graphen mit $p \leq 6$.

*
*
*4. KREISFÄRBUNGEN

*
* $p = 7$:

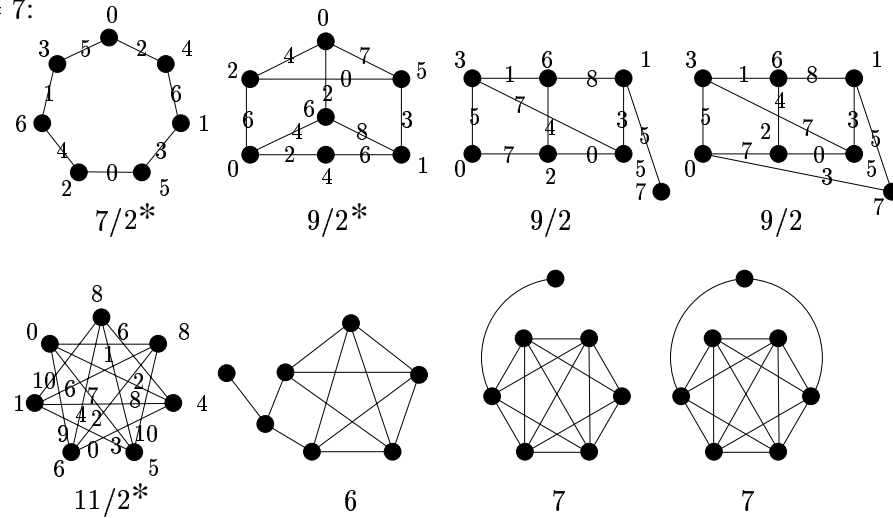


Abbildung 4.15: Kreistotalchromatische Zahl von Typ-2-Graphen mit $p = 7$.

In Tabelle 4.2 sind die in den Abbildungen zu sehenden Ergebnisse für totalfärbungskritische Graphen mit $p \leq 7$ Knoten noch einmal zusammengefasst. Zu jeder der angegebenen Gradfolgen existiert nur ein kritischer Graph.

$ V(G) $	$\Delta(G)$	Gradfolge	$\chi_c''(G)$
2	1	1^2	3
4	2	2^4	4
	3	3^4	5
5	2	2^5	$10/3$
6	3	$2^2 3^4$	$9/2$
	4	$2^1 4^5$	6
	5	5^6	7
7	2	2^7	$7/2$
	3	$2^1 3^6$	$9/2$
	4	4^7	$11/2$

Tabelle 4.2: $\chi_c''(G)$ für bezüglich Totalfärbung kritische Graphen G der Ordnung $p \leq 7$.

Kapitel 5

Listenfärbungen

Ebenso wie die in den ersten Kapiteln beschriebenen Graphenfärbungen geht auch das Konzept der Listenfärbung von Graphen auf Fragen der Knotenfärbung zurück; es wurde unabhängig voneinander von Vizing [102] und Erdős, Rubin und Taylor [40] in den Jahren 1976 beziehungsweise 1979 entwickelt. Die Idee besteht darin, für die Farben der Knoten einer k -Knotenfärbung nicht mehr jeweils alle Farben $1, \dots, k$ zuzulassen, sondern jedem Knoten eine beliebige k -elementige Liste zuzuordnen, so dass alle Knoten für jede Wahl der k -elementigen Listen aus ihren Listen gefärbt werden können.

Definition 5.1 *Es sei $L = \{L(v) : v \in V(G)\}$ eine Familie von Listen $L(v)$, die den Knoten $v \in V(G)$ eines Graphen G zugeordnet sind. Dann versteht man unter einer L -Listenknotenfärbung eine Knotenfärbung c von G , so dass $c(v) \in L(v)$ für jeden Knoten $v \in V(G)$ gilt. Der Graph heißt k -listenknotenfärbbar für ein $k \in \mathbb{N}$, wenn er für jede Familie L mit $|L(v)| \geq k$ für alle $v \in V(G)$ eine L -Listenknotenfärbung besitzt. Die kleinste Zahl k , für die der Graph k -listenknotenfärbbar ist, heißt listenchromatische Zahl (in der Literatur manchmal auch Choice-Zahl) von G und wird mit $\text{ch}(G)$ bezeichnet.*

Jetzt muss ich das mal austesten. Es gilt $\sin(\pi/2) = 1$ und $\text{ch}(G) = \text{chr}(G)$.

Satz 5.1 *Es gilt $\sin(\pi/2) = 1$ und $\text{ch}(G) = \text{chr}(G)$.*

Mit dieser Definition ist die in Kapitel 2 definierte k -Knotenfärbung eine L -Listenknotenfärbung mit den konstanten Listen $L(v) = \{1, \dots, k\}$ für alle $v \in V(G)$. Somit gilt für die listenchromatische Zahl eines Graphen G stets $\text{ch}(G) \geq \chi(G)$. Intuitiv erscheint es zunächst, als könne man einen k -knotenfärbbaren Graph sicherlich immer auch aus sich unterscheidenden k -elementigen Listen färben. In der Einleitung wurde mit dem Graph aus Abbildung 1.8 jedoch bereits gezeigt, dass es Graphen gibt, deren listenchromatische Zahl größer als ihre chromatische Zahl ist. Tatsächlich kann die Differenz zwischen der listenchromatischen Zahl und der

chromatischen Zahl sogar beliebig groß werden, da der vollständig bipartite Graph $K_{m,m}$ für genügend großes m , nämlich für $m \geq \binom{2k-1}{k}$, nicht k -listenknotenfärbbar ist (Erdős, Rubin, Taylor [40]); damit gilt $\text{ch}(K_{m,m}) - \chi(K_{m,m}) > k - 2$. Fügt man in den Graph aus Abbildung 1.8 die beiden zusätzlichen Kanten AF und CD ein, so ergibt sich ein Beispiel für dieses Ergebnis zu den Werten $k = 2$ und $m = 3$.

Hier wird wieder ein Unterschied zur Kantenfärbung deutlich: Wie im folgenden Abschnitt 5.1 noch näher dargestellt, wird vermutet, dass die listenchromatische Zahl eines Kantengraphen immer gleich seiner chromatischen Zahl ist (Vermutung 5.1).

Als obere Schranke für die listenchromatische Zahl gilt eine Übertragung des Satzes 2.2 von Brooks auf Listenfärbungen, die unabhängig voneinander von Vizing [101] und von Erdős, Rubin und Taylor [40] bewiesen wurde.

Satz 5.2 *Ist G ein Kreis ungerader Ordnung oder ein vollständiger Graph, so gilt $\text{ch}(G) = \Delta(G) + 1$; in allen anderen Fällen gilt $\text{ch}(G) \leq \Delta(G)$.*

Im Gegensatz zum Satz von Brooks lässt sich der Vierfarbensatz (Satz 2.1) jedoch nicht auf Listenfärbungen übertragen: Voigt [104] konstruierte 1993 einen planaren Graph, der nicht 4-listenknotenfärbbar ist. Ein Jahr darauf konnte Thomassen [94] zeigen, dass man zur Listenknotenfärbung eines planaren Graphen immer höchstens fünf Farben benötigt.

Satz 5.3 *Für jeden planaren Graph G gilt $\text{ch}(G) \leq 5$.*

In den beiden Abschnitten 5.1 und 5.2 wird die Listenkantenfärbung beziehungsweise die Listentotalfärbung von Graphen betrachtet.

5.1 Listenkantenfärbung

Die Definitionen zur Listenfärbung lassen sich ganz analog von Knoten- auf Kantenfärbung übertragen.

Definition 5.2 *Es sei $L = \{L(e) : e \in E(G)\}$ eine Familie von Listen $L(e)$, die den Kanten $e \in E(G)$ eines Graphen G zugeordnet sind. Dann versteht man unter einer L -Listenkantenfärbung eine Kantenfärbung c von G , so dass $c(e) \in L(e)$ für jede Kante $e \in E(G)$ gilt. Der Graph heißt k -listenkantenfärbbar für ein $k \in \mathbb{N}$, wenn er für jede Familie L mit $|L(e)| \geq k$ für alle $e \in E(G)$ eine L -Listenkantenfärbung besitzt. Die kleinste Zahl k , für die der Graph k -listenkantenfärbbar ist, heißt listenchromatischer Index und wird mit $\text{ch}'(G)$ bezeichnet. In einigen Arbeiten wird $\text{ch}'(G)$ auch listenkantenchromatische Zahl oder Choice Index genannt.*

Im Folgenden werden die Eigenschaften des listenchromatischen Index dargestellt (Abschnitt 5.1.1) sowie der Wert von $\text{ch}'(G)$ für einige Graphen G angegeben (Abschnitt 5.1.2). Schließlich werden zwei Spezialformen der Listenknotenfärbung, die (a, b) -Listenfärbung (Abschnitt 5.1.3) und die (a, b, r) -Listenfärbung (Abschnitt 5.1.4) auf Kantenfärbung übertragen.

5.1.1 Eigenschaften des listenchromatischen Index

Offensichtlich entspricht eine L -Listenkantenfärbung mit $L(e) = \{1, \dots, k\}$ für alle $e \in E(G)$ wiederum der in Kapitel 2 definierten k -Kantenfärbung eines Graphen; somit gilt für jeden Graph G die Ungleichung $\text{ch}'(G) \geq \chi'(G)$. Wie bereits erwähnt, wird hier jedoch im Unterschied zur Knotenfärbung vermutet, dass in jedem Fall die Gleichheit $\text{ch}'(G) = \chi'(G)$ gilt. Diese *listenkantenchromatische Vermutung* wurde erstmalig 1985 von Bollobás und Harris [16] veröffentlicht, vermutlich jedoch auch schon vorher in anderen Arbeiten implizit erwähnt. Die Geschichte der listenkantenchromatischen Vermutung ist bei Häggkvist und Chetwynd [57] nachzulesen.

Vermutung 5.1 (Listenkantenchromatische Vermutung) *Jeder Graph G erfüllt*

$$\text{ch}'(G) = \chi'(G).$$

Bisher konnte Vermutung 5.1 nur für einige spezielle Graphenklassen nachgewiesen werden; selbst die obere Schranke $\Delta(G) + 1$, die nach dem Satz von Vizing (Satz 2.3) für den chromatischen Index eines jeden Graphen G gilt, wurde noch nicht als allgemein gültige obere Schranke des listenchromatischen Index bestätigt. Graphen, für die der listenchromatische Index noch nicht allgemein bestimmt werden konnte, für die jedoch bereits bekannt ist, dass sie eine $(\Delta + 1)$ -Listenkantenfärbung besitzen, sind:

- Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 3$ (folgt aus Satz 5.2),
- Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 4$ (Juvan, Mohar und Škrekovski [75]),
- vollständige Graphen K_p (Häggkvist und Janssen [58]),
- planare Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 9$ (Borodin [18]),
- Graphen G mit Tailleweite $g \geq 8\Delta(G)(\ln \Delta(G) + 11/10)$ (Kostochka [82]).

Bei der Bestimmung des listenchromatischen Index eines Graphen G ist die folgende Beobachtung hilfreich.

Bemerkung 5.1 *Besitzt ein Graph G eine Kante $e' = uv \in E(G)$ mit $d(u) + d(v) \leq k$, so ist der Graph $(k - 1)$ -listenkantenfärbbar.*

Beweis. Angenommen, G sei das bezüglich der Kantenzahl kleinste Gegenbeispiel zu obiger Behauptung und L eine Familie von Listen mit $|L(e)| \geq k-1$ für alle $e \in E(G)$; dann lassen sich die Kanten von $G - e'$ aus ihren $(k-1)$ -elementigen Listen einfärben. Da e' nun jedoch zu höchstens $k-2$ bereits gefärbten Kanten benachbart ist, kann man auch aus der e' zugeordneten Liste noch eine Farbe wählen, die an den zu e' inzidenten Farben nicht auftritt und erhält eine L -Listenfärbung von G , im Widerspruch zur Behauptung. \square

Aus Bemerkung 5.1 ergibt sich unmittelbar die triviale obere Schranke $\text{ch}'(G) \leq 2\Delta - 1$ für den listenchromatischen Index eines Graphen G mit Maximalgrad Δ .

Die bisher beste Verbesserung dieser Schranke für allgemeine Graphen stammt aus dem Jahr 1997 von Molloy und Reed [85]:

Satz 5.4 *Für jeden Graph G gilt*

$$\text{ch}'(G) \leq \Delta(G) + \mathcal{O}(\Delta(G)^{\frac{1}{2}} \log^6 \Delta(G)).$$

5.1.2 Exakte Werte für den listenchromatischen Index

Zusätzlich zu den im vorigen Abschnitt genannten Graphen G , für die $\text{ch}'(G) \leq \Delta(G) + 1$ bekannt ist, gibt es einige wenige Graphen beziehungsweise Graphenklassen, für die Vermutung 5.1 bewiesen und der listenchromatische Index exakt bestimmt werden konnte.

Graphen mit kleinem Maximalgrad

Für Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G) = 2$ — also für Wege und Kreise — ist die listenkantenchromatische Vermutung nicht schwer zu beweisen. Gilt $\Delta(G) = 3$ für den Maximalgrad eines Graphen G , so erhält man, wie im vorigen Abschnitt bereits erwähnt, $\text{ch}'(G) \leq \Delta(G) + 1$, wenn man die Erweiterung des Satzes von Brooks für Listenknotenfärbungen (Satz 5.2) auf den Kantengraph $L(G)$ anwendet. Ist G ein Klasse-2-Graph, so ergibt sich eine Bestätigung der listenkantenchromatischen Vermutung für G .

Korollar 5.1 *Ist G ein Klasse-2-Graph mit Maximalgrad $\Delta = 3$, so gilt $\text{ch}'(G) = \chi'(G) = 4$.*

Vollständige Graphen

In Abschnitt 5.1.1 wurde bereits erwähnt, dass die obere Schranke $\Delta(G) + 1$ für den listenchromatischen Index vollständiger Graphen K_p angegeben werden kann (Häggkvist und Janssen, [58]). Mit Satz 2.5, der den chromatischen Index vollständiger Graphen angibt, folgt somit Satz 5.5 über den listenchromatischen Index vollständiger Graphen ungerader Knotenzahl.

Satz 5.5 *Ist K_p ein vollständiger Graph mit ungerader Knotenzahl p , so gilt*

$$\text{ch}'(K_p) = \chi'(K_p) = \Delta(K_p) + 1 = p.$$

Für vollständige Graphen gerader Ordnung ist Vermutung 5.1 noch nicht bewiesen.

Bipartite Graphen

Die älteste Fragestellung in der Listenkantenfärbung ist die Frage nach dem listenchromatischen Index balancierter vollständig bipartiter Graphen $K_{n,n}$. Dies geht auf eine Vermutung von Dinitz [40] zurück, die folgendermaßen formuliert war:

Vermutung 5.2 (Dinitz Vermutung) *Es seien n^2 Mengen mit je n Elementen in einem $n \times n$ -System angeordnet. Dann lässt sich aus jeder Menge ein Element so auswählen, dass die gewählten Elemente in jeder Zeile und in jeder Spalte des Systems verschieden sind.*

Dinitz Vermutung ist äquivalent zu der Behauptung, dass die listenkantenchromatische Vermutung für balancierte vollständig bipartite Graphen $K_{n,n}$ gilt. Nachdem sie zunächst von Alon und Tarsi [6] für $n \in \{3, 4, 6\}$ bewiesen wurde, konnte Janssen [70] im Jahr 1993 zeigen, dass $\text{ch}'(K_{n,n+1}) = \chi'(K_{n,n+1}) = n + 1$ gilt, woraus $\text{ch}'(K_{n,n}) \leq n + 1$ folgt. Die gesamte Vermutung 5.2 und darüber hinaus die listenkantenchromatische Vermutung für alle bipartiten Graphen wurde 1995 von Galvin [47] bewiesen.

Satz 5.6 (Satz von Galvin) *Ist G ein bipartiter Graph, so gilt*

$$\text{ch}'(G) = \chi'(G) = \Delta(G).$$

Planare Graphen

In Abschnitt 2.1.2 wurde dargestellt, dass planare Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 7$ immer zur Klasse 1 gehören. Dass der listenchromatische Index eines planaren Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G) \geq 9$ immer höchstens den Wert $\text{ch}'(G) \leq \Delta(G) + 1$ annimmt, wurde bereits in Abschnitt 5.1.1 erwähnt. Verschärft man die Voraussetzung für den Maximalgrad auf $\Delta(G) \geq 12$, so konnte von Borodin, Kostochka und Woodall [19] sogar die Gleichheit $\text{ch}'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$ gezeigt werden. Dieses Ergebnis aus dem Jahr 1997 ist eine Verbesserung des analogen Satzes von Borodin [18] über planare Graphen mit Maximalgrad $\Delta(G) \geq 14$.

Satz 5.7 *Ist G ein planarer Graph mit Maximalgrad $\Delta \geq 12$, so gilt*

$$\text{ch}'(G) = \chi'(G) = \Delta.$$

Wie in der klassischen Kantenfärbung auch, erhält man noch bessere Ergebnisse, wenn man zusätzlich zur Schranke für den Maximalgrad eines planaren Graphen G auch Bedingungen an die Tailleweite g von G stellt. Borodin, Kostochka und Woodall [19] untersuchten den listenchromatischen Index planarer Graphen in Abhängigkeit vom Maximalgrad und der Tailleweite; fügt man das Ergebnis aus Satz 5.7 hinzu, welches den Fall $g \geq 3$ und $\Delta \geq 12$ behandelt, so erhält man den folgenden Satz:

Satz 5.8 *Ist G ein planarer Graph mit Maximalgrad Δ und Tailleweite g , so gilt*

$$\text{ch}'(G) = \chi'(G) = \Delta \quad \text{für} \quad \begin{cases} \Delta \geq 12 & \text{und} & g \geq 3 \\ \Delta \geq 7 & \text{und} & g \geq 4 \\ \Delta \geq 5 & \text{und} & g \geq 5 \\ \Delta \geq 4 & \text{und} & g \geq 6 \\ \Delta \geq 3 & \text{und} & g \geq 10. \end{cases}$$

Auch für outerplanare Graphen, die nach Satz 2.16 mit Ausnahme der ungeraden Kreise zur Klasse 1 gehören, kann die listenkantenchromatische Vermutung bewiesen werden. Für outerplanare Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 5$ ist ein Beweis dazu bereits bei Hackmann [52] sowie Hackmann und Kemnitz [54] erschienen, der in Satz 5.12 erheblich vereinfacht wird. Die Fälle $\Delta = 3$ und $\Delta = 4$ aus Satz 5.9 sind einer bisher unveröffentlichten Arbeit von Juvan und Mohar [73] entnommen, in der der listenkantenchromatische Index aller outerplanaren Graphen bestimmt wird.

Satz 5.9 *Ist G ein outerplanarer Graph mit Maximalgrad $\Delta = 3$ oder $\Delta = 4$, so gilt $\text{ch}'(G) = \Delta(G)$.*

In den folgenden Überlegungen sei ein outerplanarer Graph G immer so dargestellt, dass die Knoten auf dem Rand der Außenfläche liegen. Es ist leicht zu sehen, dass 2-zusammenhängende outerplanare Graphen immer einen hamiltonschen Kreis enthalten. Ist G ein nicht 2-zusammenhängender Graph und enthält somit Artikulationen, so besteht G aus mehreren Blöcken, den maximalen 2-zusammenhängenden Teilgraphen von G . Dabei ist jede Artikulation von G in genau zwei Blöcken enthalten, und in jedem Block liegt mindestens eine Artikulation von G . Ein Block heißt *Endblock* des Graphen, wenn er genau eine Artikulation von G enthält.

Die folgenden beiden Lemmata werden zum Beweis von Satz 5.12 benötigt.

Lemma 5.10 *Ein 2-zusammenhängender outerplanarer Graph G der Ordnung $p \geq 4$ hat mindestens zwei nicht benachbarte Knoten vom Grad 2.*

Beweis. Der Graph G sei so dargestellt, dass die Knoten der Außenfläche einen hamiltonschen Kreis $C = (v_1, \dots, v_p, v_1)$ bilden. Für $p = 4$ sowie für $G = C_p$ ist

die Aussage klar. Im Folgenden sei also $p > 4$ und $\Delta(G) \geq 3$. Es sei v_i ein Knoten vom Grad $d(v_i) \geq 3$; dann hat v_i mindestens einen Nachbarn v_j mit $v_i v_j \notin E(C)$. Nun sei G' der Teilgraph von G , der durch die Knoten $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j$ und G'' derjenige, der durch $v_j, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, v_i$ aufgespannt wird. Die Graphen G' und G'' sind beide 2-zusammenhängend und outerplanar. Hat einer der beiden Teilgraphen G' oder G'' die Ordnung 3, so ist der einzige Knoten $x \notin \{v_i, v_j\}$ in diesem Graph notwendigerweise vom Grad 2. Ist anderenfalls die Ordnung $|V(G')| \geq 4$ beziehungsweise $|V(G'')| \geq 4$, so kann man auf diesen Teilgraph die Induktion anwenden, und er enthält somit mindestens zwei nicht benachbarte Knoten vom Grad 2, wovon jeweils mindestens einer nicht in $\{v_i, v_j\}$ liegt. Sowohl G' als auch G'' besitzen also jeweils mindestens einen Knoten vom Grad 2, der nicht gleich v_i oder v_j ist. Da diese beiden Knoten daher in G nicht benachbart sein können, entsprechen sie der Behauptung des Lemmas. \square

Bemerkung 5.2 *In einem 2-zusammenhängenden outerplanaren Graphen kann ein Knoten höchstens zwei Nachbarn vom Grad 2 haben, nämlich die Nachbarn, die auf dem hamiltonschen Kreis des Graphen direkt vor beziehungsweise hinter dem Knoten liegen. Alle anderen Nachbarn des Knotens haben mindestens den Grad 3.*

Aus dem gleichen Grund hat jeder Knoten eines nicht 2-zusammenhängenden outerplanaren Graphen jeweils höchstens zwei Nachbarn vom Grad 2 in jedem Block, zu dem der Knoten gehört.

Lemma 5.11 *Jeder outerplanare Graph G mit Minimalgrad $\delta(G) \geq 2$ hat mindestens einen Knoten vom Grad 2, der zu einem Knoten vom Grad ≤ 4 benachbart ist.*

Beweis. Angenommen, G sei ein Gegenbeispiel zu Lemma 5.11 und B ein Endblock von G mit Artikulation v (ist G 2-zusammenhängend, so sei v ein beliebiger Knoten aus $V(G)$). Des Weiteren sei D der Graph mit Knotenmenge $V(D) = V(B) \cup N(v)$ und Kantenmenge $E(D) = E(B) \cup \{uv : u \in N(v)\}$, also der Block B mit allen zusätzlichen Knoten und Kanten, die in G zu v benachbart sind. Damit hat jeder Knoten aus $V(B)$ in D den gleichen Grad wie in G .

Nun sei D' der Graph, der entsteht, wenn man aus D alle Knoten vom Grad 2 entfernt. D' ist ebenfalls outerplanar. Da G ein Gegenbeispiel zu Lemma 5.11 ist, besteht B nicht nur aus Knoten vom Grad 2; mit B' sei daher analog der Graph benannt, der entsteht, wenn man aus B alle Knoten vom Grad 2 entfernt. B^* sei ein Endblock von B' ; dann ist B^* offensichtlich outerplanar und 2-zusammenhängend.

Als nächstes wird gezeigt, dass in B^* mindestens ein Knoten u vom Grad $d_{D'}(u) \leq 2$ existiert:

Gibt es in B^* einen Knoten, der in D' höchstens den Grad 1 hat, so ist die Behauptung klar. Also sei $d_{D'}(w) \geq 2$ für alle $w \in V(B^*)$. Damit muss B^* mindestens

drei Knoten enthalten. Gilt $|V(B^*)| = 3$, so haben mindestens zwei dieser Knoten in D' den Grad 2 und entsprechen der Behauptung. Gilt jedoch $|V(B^*)| \geq 4$, so enthält B^* nach Lemma 5.10 mindestens zwei Knoten vom Grad 2; mindestens einer davon hat auch in D' den Grad 2.

Wegen $d_{D'}(u) \leq 2$ und $d_D(u) \geq 3$ besitzt u in D mindestens einen Nachbarn vom Grad 2. Da G ein Gegenbeispiel zur Behauptung des Lemmas ist, gilt somit jedoch $d_D(u) \geq 5$, das heißt, u ist in D — und damit auch im Block B — zu mindestens $d_D(u) - d_{D'}(u) \geq 3$ Knoten vom Grad 2 adjazent. Dies widerspricht Bemerkung 5.2. \square

Mit den vorangegangenen Lemmata lässt sich nun der folgende Satz beweisen.

Satz 5.12 *Sei G ein outerplanarer Graph mit $\Delta(G) \geq 5$. Dann gilt*

$$ch'(G) = \chi'(G) = \Delta(G).$$

Beweis. Angenommen, die Kanten von G seien nicht mit $\Delta(G)$ Farben listenkantenfärbbar. Nach Bemerkung 5.1 gilt dann $d(u) + d(v) > \Delta(G) + 1$ für jede Kante $uv \in E(G)$ und somit $\delta(G) \geq 2$. Also kann Lemma 5.11 angewandt werden, und es gibt in G' mindestens einen Knoten u' vom Grad 2, der zu einem Knoten v' vom Grad ≤ 4 benachbart ist; damit gilt $d(u') + d(v') \leq 6$, und wiederum aus Bemerkung 5.1 folgt $ch'(G) \leq 5 \leq \Delta(G)$, im Widerspruch zur Annahme.

Folglich ist G mit $\Delta(G)$ Farben listenkantenfärbbar. \square

Aus den Sätzen 5.9 und 5.12 und dem bekannten listenchromatischen Index von Kreisen C_p folgt die listenkantenchromatische Vermutung für outerplanare Graphen.

Korollar 5.2 *Für jeden outerplanaren Graph G gilt $ch'(G) = \chi'(G)$.*

Auch für spezielle planare reguläre Graphen konnte die listenkantenchromatische Vermutung bereits bestätigt werden. Da selbst der chromatische Index noch nicht allgemein für planare reguläre Graphen bestimmt ist, gibt es hier natürlich auch noch kein allgemeines Ergebnis für Listenkantenfärbungen. Beschränkt man sich jedoch auf planare reguläre Klasse-1-Graphen, so wird der listenchromatische Index durch den folgenden Satz von Ellingham und Goddyn [38] angegeben.

Satz 5.13 *Ist G ein planarer Δ -regulärer Klasse-1-Graph, so gilt*

$$ch'(G) = \chi'(G) = \Delta.$$

5.1.3 (a, b) -Listenkantenfärbung

Das Konzept der Listenfärbung von Graphen, bei der jeder Knoten, jede Kante oder jedes Element des Graphen eine Farbe aus einer ihr vorher zugeordneten Liste erhalten muss, lässt sich in vielfältiger Weise spezialisieren oder verallgemeinern. Solche so genannten *Listenfärbungen mit lokalen Bedingungen* wurden bisher vor allem in Bezug auf Knotenfärbung betrachtet. Eine Übersicht über dieses spezielle Gebiet der Listenknotenfärbung gibt Voigt [104] sowie ein Artikel von Tuza [95], der 1998 von Kratochvíl, Tuza und Voigt [83] auf den neusten Stand gebracht wurde. Viele Ideen oder Ergebnisse lassen sich auch auf Kantenfärbungen übertragen: So kann man zum Beispiel Listenkantenfärbungen untersuchen, in denen jede Kante nicht mit einer, sondern mit mehreren Farben gefärbt wird.

Definition 5.3 Für $a, b \in \mathbb{N}$ ist eine (a, b) -Listenkantenfärbung c eines Graphen G eine L -Listenkantenfärbung von G , für die $|L(e)| = a$ für alle $e \in E(G)$ gilt und bei der jeder Kante e nicht nur eine, sondern b Farben der a -elementigen Liste $L(e)$ zugeordnet werden, so dass $c(e_i) \cap c(e_j) = \emptyset$ gilt für je zwei benachbarte Kanten e_i und e_j . Ein Graph G heißt (a, b) -listenkantenfärbbar für $a, b \in \mathbb{N}$, wenn für jede mögliche Zuordnung von Listen $L(e)$ zu den Kanten von G mit $|L(e)| \geq a$ für alle $e \in E(G)$ eine (a, b) -Listenkantenfärbung aus den Listen existiert.

Analog zum listenchromatischen Index $\text{ch}'(G)$, der die kleinste Zahl k angibt, für die ein Graph mit k -elementigen Listen listenkantenfärbbar ist, ist für die (a, b) -Listenkantenfärbung die Choice Edge Ratio definiert.

Definition 5.4 Die Choice Edge Ratio $\text{chr}'(G)$ eines Graphen G ist definiert als

$$\text{chr}'(G) = \inf \left\{ \frac{a}{b} : G \text{ ist } (a, b)\text{-listenkantenfärbbar} \right\}.$$

Für $b = 1$ entspricht die (a, b) -Listenkantenfärbung der in Abschnitt 5.1 definierten Listenkantenfärbung. Somit ist $\text{ch}'(G)$ die kleinste Zahl a , für die ein Graph G eine $(a, 1)$ -Listenkantenfärbung besitzt, und es gilt $\text{chr}'(G) \leq \text{ch}'(G)$.

Die Definitionen 5.3 und 5.4 beruhen auf den analogen Begriffen (a, b) -Listenknotenfärbung und Choice Ratio $\text{chr}(G)$ für Knotenfärbung. Nach einem Satz von Alon, Tuza und Voigt [7] gibt es für jeden Graph G Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, so dass G (a, b) -listenknotenfärbbar ist und $\text{chr}(G) = a/b$ gilt. Dieser Satz lässt sich unter Betrachtung des Kantengraphen $L(G)$ eines Graphen G auf (a, b) -Listenkantenfärbung übertragen.

Satz 5.14 Für jedes $q \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $f(q) \leq (q+1)^{2q+2}$, so dass folgendes gilt: Ist $F \in \mathbb{N}$ eine durch alle natürlichen Zahlen $n \leq f(q)$ teilbare Zahl, so hat jeder Graph G mit q Kanten und Choice Edge Ratio $\text{chr}'(G)$ eine $(F, F/\text{chr}'(G))$ -Listenkantenfärbung.

Beweis. Nach [7] gibt es für den Kantengraph $L(G)$ von G mit $|V(L(G))| = |E(G)| = q$ eine Zahl $f(q) \leq (q+1)^{2q+2}$, so dass $L(G)$ eine $(F, F/\text{chr}(L(G)))$ -Listenknotenfärbung besitzt für jede Zahl $F \in \mathbb{N}$, die durch alle natürlichen Zahlen $n \leq f(q)$ teilbar ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

Somit ist die Choice Edge Ratio immer rational, und das Infimum in Definition 5.4 kann durch das Minimum ersetzen werden.

Gutner [51] zeigte 1992 mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden und einer anderen Terminologie, dass die Choice Ratio eines Graphen G nie größer als seine chromatische Zahl ist. Dieses Ergebnis lässt sich wiederum mittels Betrachtung des Kantengraphen $L(G)$ unmittelbar auf Kantenfärbungen übertragen; zudem kann man mit dem Satz von Vizing eine allgemeingültige untere Schranke für die Choice Edge Ratio angeben:

Satz 5.15 *Für jeden Graph G mit Maximalgrad Δ gilt $\Delta \leq \text{chr}'(G) \leq \chi'(G)$.*

Beweis. Die zweite Ungleichung folgt aus dem oben erwähnten Ergebnis von Gutner [51] zur (a, b) -Listenknotenfärbung: $\text{chr}'(G) = \text{chr}(L(G)) \leq \chi(L(G)) = \chi'(G)$. Damit ist die obere Schranke bewiesen.

Die untere Schranke ergibt sich, wenn man die Δ zu einem Knoten mit Maximalgrad inzidenten Kanten e_1, \dots, e_Δ eines Graphen betrachtet. Angenommen, G sei (a, b) -listenkantenfärbbar mit $a/b < \Delta$; dann werden die Kanten e_i für $i = 1, \dots, \Delta$ mit insgesamt $b\Delta$ verschiedenen Farben $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_b}$ gefärbt. Da jedoch $a < b\Delta$ gilt, kann nicht jede Kante vollständig aus den zugeordneten Listen gefärbt werden, im Widerspruch zur Definition der (a, b) -Listenkantenfärbung. Also ist G nicht (a, b) -listenkantenfärbbar für $a/b < \Delta$. \square

Da für jeden Graph G nach dem Satz von Vizing $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ gilt, führt Satz 5.15 zu folgendem Korollar.

Korollar 5.3 *Ist G ein Klasse-1-Graph, so gilt $\text{chr}'(G) = \Delta(G)$; ist G dagegen ein Klasse-2-Graph, so gilt $\Delta(G) \leq \text{chr}'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Für Klasse-1-Graphen G ist die Choice Edge Ratio somit bereits bestimmt, und in diesem Fall gilt $\text{chr}'(G) = \chi'(G)$. Der folgende Satz zeigt, dass es jedoch auch Graphen mit $\text{chr}'(G) < \chi'(G)$ gibt. Da für einen Kreis C_p immer $L(C_p) \cong C_p$ gilt, kann man das Ergebnis von Satz 5.16 auch aus dem analogen Satz von Alon, Tuza und Voigt [7] für Knotenfärbung ableiten; die direkte Übertragung des Beweises auf Kantenfärbung verdeutlicht jedoch besser die Methoden der Beweisführung.

Satz 5.16 *Für jeden ungeraden Kreis C_{2k+1} gilt*

$$\text{chr}'(C_{2k+1}) = 2 + \frac{1}{k}.$$

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass C_{2k+1} eine $(2k+1, k)$ -Listenkantenfärbung besitzt.

Es seien e_1, \dots, e_{2k+1} die Kanten des Kreises und $L(e_i)$ für $i = 1, \dots, 2k+1$ die einer Kante e_i zugeordnete $(2k+1)$ -elementige Liste. Des Weiteren sei $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\} = \bigcap_{e_i \in E(C_{2k+1})} L(e_i)$ die Schnittmenge aller dieser Listen. Da $|L(e_i)| = 2k+1$ gilt, ist $t \leq 2k+1$. Es werden nun neue Listen $L'(e_i) = L(e_i) \setminus \alpha_i$ für $i = 1, \dots, t$ und $L'(e_i) = L(e_i)$ für $i = t+1, \dots, 2k+1$ definiert. Die neuen Listen haben jeweils mindestens $2k$ Elemente, und es gibt keine Farbe, die in jeder Liste vorkommt.

Die Kanten von C_{2k+1} seien im Uhrzeigersinn orientiert. Für jede Kante kann man nun folgendermaßen k Farben auswählen: Es sei α eine beliebige Farbe in einer Liste L' und G_α der Teilgraph von C_{2k+1} , der von allen Kanten induziert wird, die α in ihrer Liste L' enthalten. Jeder solche Teilgraph ist eine Vereinigung gerichteter Wege und enthält daher eine unabhängige Kantenmenge E_α mit der Eigenschaft, dass jede Kante $e \in E(G_\alpha)$ entweder selbst in E_α liegt oder eine Nachfolgekante in E_α besitzt. Die Farbe α wird für alle Kanten aus E_α gewählt und anschließend aus jeder Liste gestrichen. Dieses Verfahren wird für alle Farben $\alpha \in \bigcup_{e_i \in E(C_{2k+1})} L(e_i)$ wiederholt. Wenn eine Kante bereits mit k Farben gefärbt ist, so wird sie aus dem Graph entfernt. Auf diese Weise wird eine Farbe α genau dann aus der Liste einer Kante e gestrichen, wenn sie entweder für e selbst oder für die Nachfolgekante von e gewählt wurde. Es bleiben damit jeweils mindestens k Farben, die man für eine Kante wählen kann; also besitzt C_{2k+1} eine $(2k+1, k)$ -Listenkantenfärbung und es gilt $\text{chr}'(C_{2k+1}) \leq 2 + 1/k$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\text{chr}'(C_{2k+1}) \geq 2 + 1/k$ gilt. Angenommen, C_{2k+1} sei (a, b) -listenkantenfärbbar mit $a/b < 2 + 1/k$. Den Kanten von C_{2k+1} seien jeweils die Farben $\{1, \dots, a\}$ zugeordnet. Gilt $a < 2b$, so ist der Graph nicht aus den Listen färbbar, da die b -elementigen Farbmengen, die man für zwei benachbarte Kanten wählt, sich immer überschneiden. Im Folgenden sei also $a \geq 2b$. Wählt man nun eine Menge $c(e_1)$ von b Farben für e_1 und eine Menge $c(e_2)$ von b anderen Farben für e_2 , so bleiben für e_3 noch $a - b$ Farben, die man für die Färbung $c(e_3)$ von e_3 wählen kann. Aus diesen sind b Farben schon für e_1 benutzt; das heißt, es ergibt sich $|c(e_3) \setminus c(e_1)| \leq a - 2b$. Allgemein gilt nun: Ist e_{2l} eine Kante mit gerader Nummerierung und $c(e_{2l})$ die Menge der Farben, mit denen e_{2l} gefärbt wird, so berechnet sich die Anzahl der Farben aus $c(e_{2l})$, die auch schon in $c(e_1)$ benutzt wurden, folgendermaßen:

$$\begin{aligned} |c(e_{2l}) \cap c(e_1)| &\leq b - |c(e_{2l-1}) \cap c(e_1)| \\ &= b - (b - |c(e_{2l-1}) \setminus c(e_1)|) \\ &= |c(e_{2l-1}) \setminus c(e_1)|. \end{aligned}$$

Ist dagegen e_{2l+1} eine Kante mit ungerader Nummerierung, so gilt

$$|c(e_{2l+1}) \setminus c(e_1)| \leq a - 2b + |c(e_{2l}) \cap c(e_1)|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq a - 2b + |c(e_{2l-1}) \setminus c(e_1)| \\
 &\leq \dots \leq l(a - 2b) + |c(e_1) \setminus c(e_1)| \\
 &= l(a - 2b).
 \end{aligned}$$

Für die Kante e_{2k+1} erhält man also

$$|c(e_{2k+1}) \setminus c(e_1)| \leq k(a - 2b),$$

und wegen der Voraussetzung $a/b < 2 + 1/k$ ergibt sich

$$|c(e_{2k+1}) \setminus c(e_1)| < k \frac{b}{k} = b,$$

ein Widerspruch zur Annahme, dass C_{2k+1} eine (a, b) -Listenkantenfärbung besitzt. Also ist C_{2k+1} nicht (a, b) -listenkantenfärbbar für $a/b < 2 + 1/k$, und somit gilt $\text{chr}'(C_{2k+1}) = 2 + 1/k$. \square

Ganz analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 5.16 lässt sich zeigen, dass ungerade Kreise C_{2k+1} nicht nur $(2k + 1, k)$ -listenkantenfärbbar sind, sondern sogar für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine $((2k + 1)m, km)$ -Listenkantenfärbung besitzen.

Korollar 5.4 *Jeder ungerade Kreis C_{2k+1} ist $((2k + 1)m, km)$ -listenkantenfärbbar für alle $m \in \mathbb{N}$.*

Obwohl aus Satz 5.14 und Korollar 5.3 folgt, dass zu einem Klasse-1-Graph G immer ein $F \in \mathbb{N}$ existiert, so dass G für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine $(mF, mF/\Delta(G))$ -Listenkantenfärbung besitzt, gibt es jedoch noch keine allgemeine Aussage, für welche Werte a, b mit $a/b = \text{chr}'$ ein Graph (a, b) -listenkantenfärbbar ist. So konnte die Verallgemeinerung, die Korollar 5.4 gegenüber Satz 5.16 darstellt, bisher nicht für alle Graphen bewiesen werden. In der (a, b) -Listenknotenfärbung gibt es jedoch eine entsprechende Vermutung von Erdős, Rubin und Taylor [40], die auch auf Kantenfärbungen übertragen werden kann.

Vermutung 5.3 *Ist ein Graph (a, b) -listenkantenfärbbar, so ist er auch (am, bm) -listenkantenfärbbar für alle $m \in \mathbb{N}$.*

Eine darüber hinausgehende Frage, analog zu einer Frage von Erdős, Rubin und Taylor [40] zur Knotenfärbung, lautet folgendermaßen:

Ist ein Graph G , der eine (a, b) -Listenkantenfärbung besitzt, auch immer (c, d) -listenkantenfärbbar für alle $c, d \in \mathbb{N}$ mit $a/b \leq c/d$? Für (a, b) -Listenknotenfärbung ist diese Frage mit „nein“ zu beantworten: Es sei G ein vollständig bipartiter Graph, der nicht 3-listenknotenfärbbar ist und $a, b \in \mathbb{N}$ seien natürliche Zahlen mit $a/b < 3$, so dass G eine (a, b) -Listenknotenfärbung besitzt. Dann erfüllen $c = 3$ und $d = 1$ die Bedingungen $a/b < c/d$, aber G ist nicht (c, d) -listenknotenfärbbar.

Auf Kantenfärbungen lässt sich dieses Ergebnis nicht ohne weiteres übertragen, da aufgrund von Vermutung 5.1 keine Graphen G mit $\chi'(G) < \text{ch}'(G)$ bekannt sind. Ist obige Frage für Kantenfärbung mit „ja“ zu beantworten, so folgt daraus sogar die Richtigkeit der listenkantenchromatische Vermutung 5.1: Da es Zahlen a, b mit $a/b \leq \chi'(G)$ gibt, so dass G (a, b) -listenkantenfärbbar ist, wäre G dann auch $(\chi'(G), 1)$ -listenkantenfärbbar und somit ergäbe sich $\chi'(G) = \text{ch}'(G)$.

Im Folgenden wird Vermutung 5.3 für bestimmte Graphen beziehungsweise bestimmte Werte für a und b untersucht.

Satz 5.6 von Galvin [47] über den listenchromatischen Index bipartiter Graphen wurde von ihm nicht nur für $(\Delta, 1)$ -Listenkantenfärbungen bewiesen, sondern es wird allgemein gezeigt, dass alle bipartiten Graphen mit Maximalgrad Δ für alle $m \in \mathbb{N}$ eine $(\Delta m, m)$ -Listenkantenfärbung besitzen, wodurch die folgenden Sätze 5.17 und 5.19 schon bewiesen sind. Sie sollen hier trotzdem noch einmal direkt bewiesen werden, da die benutzten Methoden zwar auf ähnlichen Ideen beruhen, aber grundsätzlich einfacher sind als im allgemeinen Beweis für bipartite Graphen.

Satz 5.17 beweist Vermutung 5.3 für 2-listenkantenfärbbare Graphen. Die verwendete Methode ähnelt der Beweisführung zu Satz 5.16. Das entsprechende Ergebnis für (a, b) -Listenknotenfärbung ist bei Tuza und Voigt [96] zu finden.

Satz 5.17 *Jeder 2-listenkantenfärbbare Graph G ist $(2m, m)$ -listenkantenfärbbar für jedes $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.*

Beweis. Ein Graph ist genau dann 2-listenkantenfärbbar, wenn er ein Weg P_k oder ein gerader Kreis C_{2k} mit $k \geq 2$ ist. Also ist zu zeigen: Jeder Weg und jeder gerade Kreis ist $(2m, m)$ -listenkantenfärbbar für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Auf G sei eine Orientierung definiert, so dass G ein gerichteter Weg beziehungsweise ein gerichteter Kreis ist, und jeder Kante $e \in E(G)$ sei eine $2m$ -elementige Liste $L(e)$ zugeordnet. Mit c_1, \dots, c_l sei die Menge aller Farben c_i bezeichnet, die in mindestens einer der Listen vorkommen. Für jede Farbe c_i sei nun G_{c_i} der Graph, der durch alle Kanten e induziert wird, für die $c_i \in L(e)$ gilt. In jedem Fall ist G_{c_i} eine Vereinigung gerichteter Wege oder ein gerader gerichteter Kreis. G wird nun folgendermaßen gefärbt: Für jede Farbe c_i , $i = 1, \dots, l$, färbt man eine unabhängige Kantenmenge in G_{c_i} so, dass jede Kante entweder selbst gefärbt wird oder zu einer gefärbten Kante hin gerichtet ist. Die Farbe c_i wird nun aus allen Listen gestrichen; ist eine Kante m -fach gefärbt, wird sie aus dem Graph entfernt. Auf diese Weise wird eine Farbe aus der Liste einer Kante e nur dann entfernt, wenn die Kante entweder selbst mit dieser Farbe gefärbt wird (m -mal) oder die im orientierten Graphen nachfolgende Kante gefärbt wird (höchstens m -mal). Die $2m$ Farben in jeder Liste reichen somit für eine Färbung aus. \square

Wie der folgende Satz zeigt, sind Wege und gerade Kreise die einzigen Graphen G , für die $\text{chr}'(G) = 2$ gilt. Der Beweis ist eine Übertragung eines analogen Ergebnisses für Knotenfärbung von Johnson [72].

Satz 5.18 Für einen Graph G gilt $\text{chr}'(G) = 2$ genau dann, wenn $\chi'(G) = 2$.

Beweis. Ist $\chi'(G) = 2$, so ist auch der Maximalgrad $\Delta(G) = 2$. Nach Satz 5.15 gilt damit $\text{chr}'(G) = 2$.

Ist $\text{chr}'(G) = 2$, so folgt wie bereits erwähnt aus Satz 5.14, dass es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass G eine $(2r, r)$ -Listenkantenfärbung besitzt. Man wähle nun für jede Kante e die gleiche Liste $L(e) = \{a_1, \dots, a_{2r}\}$ von Farben und färbe die Kanten von G jeweils r -Fach aus ihren Listen. Es sei e eine mit den Farben a_1, \dots, a_r gefärbte Kante; dann müssen alle Nachbarkanten von e mit a_{r+1}, \dots, a_{2r} gefärbt sein. Man kann also die ersten r Farben der Liste als eine, die letzten r Farben der Liste als eine zweite Farbe auffassen und erhält so eine 2-Färbung von G . Somit gilt $\chi'(G) = 2$. \square

Satz 5.19 beweist Vermutung 5.3 für Bäume T . Die im Beweis verwendete Idee, die Kanten von T in einer bestimmten Reihenfolge zu färben, ist eine Übertragung analoger Überlegungen zur (a, b) -Listenknotenfärbung (siehe Voigt [104, S. 15]).

Satz 5.19 Jeder Baum T mit $\Delta(T) = \Delta$ ist $(\Delta m, m)$ -listenkantenfärbbar für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Kanten von T werden folgendermaßen durchnummeriert: Zunächst beziffert man die Kanten, die zu Knoten vom Grad 1 inzident sind. Daraufhin werden alle Knoten vom Grad 1 entfernt, und man verfährt mit dem entstehenden Graph wieder genauso. Auf diese Weise erhält man schließlich den Graph K_2 und benennt die verbleibende Kante mit e_q . Gefärbt wird nun in umgekehrter Reihenfolge: Die Kante e_q erhält m beliebige Farben aus der zugeordneten Δm -elementigen Liste. Bei der Färbung der anderen Kanten in der Reihenfolge e_q, \dots, e_1 ist jede zu färbende Kante e_i zu höchstens $\Delta - 1$ bereits gefärbten Kanten e_j mit $j > i$ benachbart; es bleiben also immer mindestens m weitere Farben für eine Färbung. \square

Schließlich soll Vermutung 5.3 für eine bestimmte Klasse kritischer Graphen der Kantenfärbung bewiesen werden. Dazu wird das folgende Lemma benutzt, eine Übertragung eines analogen Ergebnisses für Knotenfärbung von Voigt [104].

Lemma 5.20 Es sei G ein Graph mit $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, wobei E_1, E_2 und E_3 Mengen unabhängiger Kanten sind und für jedes Paar $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ gilt: $E_i \cap E_j = \emptyset$ und der durch die Menge $E_i \cup E_j$ aufgespannte Teilgraph $G_{i,j}$ von G ist 2-listenkantenfärbbar. Dann hat G eine $(4m, m)$ -Listenkantenfärbung für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Dem Graph G seien $4m$ -elementige Farblisten zugeordnet. Die Teilgraphen $G_{i,j}$ sind nach Voraussetzung für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und $i \neq j$ alle 2-listenkantenfärbbar und damit nach Satz 5.17 $(2m, m)$ -listenkantenfärbbar für jedes $m \geq 1$.

Zunächst wird der Graph $G_{1,2}$ betrachtet. Er ist $(2m, m)$ -, also auch $(4m, 2m)$ -listenkantenfärbbar für jedes $m \in \mathbb{N}$. Man färbe jede Kante von $G_{1,2}$ mit jeweils $2m$ Farben aus den zugeordneten $4m$ -elementigen Listen. Diese neuen, $2m$ -elementigen Farblisten der Kanten $e \in E_1 \cup E_2$ seien mit $L'(e)$ benannt.

Da $G_{1,3}$ eine 2-Listenkantenfärbung besitzt, ist jede Kante aus E_3 zu höchstens zwei Kanten aus E_1 benachbart. Färbt man die Kanten von E_1 mit jeweils m Farben aus den zugeordneten Listen L' und entfernt die an benachbarten Kanten benutzten Farben aus den Listen der zu E_3 gehörenden Kanten, so bleiben dort also noch mindestens $2m$ Farben in jeder Liste bestehen. Dies seien die neuen Listen L' für die Kanten aus E_3 .

Den Kanten des Graphen $G_{2,3}$ sind nun jeweils $2m$ -elementige Farblisten L' zugeordnet. Da der Graph $(2m, m)$ -listenkantenfärbbar ist, lassen sich die Kanten aus E_2 und E_3 aus diesen Listen mit jeweils m Farben färben. Auf diese Weise erhält man eine Kantenfärbung von G' , bei der jede Kante mit genau m Farben aus der zugeordneten Liste gefärbt ist. Also ist G' $(4m, m)$ -listenkantenfärbbar für jedes $m \in \mathbb{N}$. \square

Lemma 5.20 lässt sich nun auf überfüllte kritische Graphen G mit $\Delta(G) = 3$ anwenden, die in Kapitel 3 näher beschrieben wurden.

Satz 5.21 *Es sei G ein überfüllter kritischer Graph mit $\Delta(G) = 3$. Dann ist G $(4m, m)$ -listenkantenfärbbar für alle $m \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Hat G die Ordnung p , so hat der Graph nach den Überlegungen in den Beweisen zu Lemma 3.4 und Satz 3.7 die Gradfolge $2^1 3^{p-1}$ und lässt sich in eine Menge von Kreisen, wovon genau einer ungerade ist, und eine Menge von $(p-1)/2$ unabhängigen Kanten zerlegen. Es sei e eine zu dem Knoten vom Grad 2 inzidente Kante und G' der Graph $G - e$. Dann besteht $E(G')$ aus drei Mengen E_1 , E_2 und E_3 von jeweils $(p-1)/2$ unabhängigen Kanten. Zudem hat G' die Eigenschaft, dass für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, die von der Kantenmenge $E_i \cup E_j$ induzierten Teilgraphen von G' , die mit $G_{i,j}$ bezeichnet seien, alle 2-listenkantenfärbbar sind. Nach Lemma 5.20 ist G also $(4m, m)$ -listenkantenfärbbar für alle $m \in \mathbb{N}$.

Die Kante e ist in G zu genau 3 Kanten inzident. Streicht man die an den inzidenten Kanten benutzten Farben aus der $4m$ -elementigen Liste $L(e)$, so bleiben noch mindestens m Farben übrig, die man für eine Färbung von e verwenden kann. Somit hat auch der Graph G eine $(4m, m)$ -Listenkantenfärbung für alle $m \geq 1$. \square

Satz 5.21 kann auch ganz direkt bewiesen werden: Zunächst färbt man die $(p-1)/2$ unabhängigen Kanten beliebig m -fach. Jede Kante e der verbleibenden Kreise ist zu jeweils 2 gefärbten Kanten (beziehungsweise zu einer gefärbten Kante, falls sie zum Knoten vom Grad 2 inzident ist) adjazent. Streicht man die an inzidenten Kanten benutzten Farben, so bleiben für die zum Knoten vom Grad 2 inzidenten Kanten noch $3m$, für alle anderen Kanten noch $2m$ Farben übrig. Mit diesen Listen sind die Kreise ebenfalls m -fach färbbar.

Die im ersten Beweis zu Satz 5.21 angegebene Methode lässt jedoch die folgende Frage aufkommen: Kann man diese Vorgehensweise auch auf Graphen übertragen, die aus mehr als drei unabhängigen Kantenmengen bestehen? Hätte man eine solche Möglichkeit, so könnte man damit Aussagen über die $((\Delta + 1)m, m)$ -Listenkantenfärbbarkeit aller überfüllten kritischen planaren Graphen (auch mit $\Delta > 3$) treffen.

5.1.4 (a, b, r) -Listenkantenfärbung

Eine Spezialform der (a, b) -Listenkantenfärbung erhält man, wenn man die zulässige Schnittmenge der Listen benachbarter Kanten einschränkt. Auch diese Definition ist bisher nur für Listenknotenfärbungen untersucht worden und soll hier auf Listenkantenfärbungen übertragen werden.

Definition 5.5 Ein Graph G heißt (a, b, r) -listenkantenfärbbar für $a, b, r \in \mathbb{N}$ und $b, r < a$, wenn für jede mögliche Zuordnung von Listen L zu den Kanten von G mit $|L(e)| \geq a$ für alle $e \in E(G)$ und $|L(e_i) \cap L(e_j)| \leq r$ für je zwei adjazente Kanten e_i und e_j eine Färbung c existiert, so dass gilt: $|c(e)| = b$, $c(e) \subseteq L(e)$ für jede Kante e und $c(e_i) \cap c(e_j) = \emptyset$ für je zwei adjazente Kanten e_i und e_j .

Für $r = a$ entspricht diese Definition der in Abschnitt 5.1.3 beschriebenen (a, b) -Listenkantenfärbung. Für $r = 0$ dagegen ist jeder Graph (a, b, r) -listenkantenfärbbar, da in diesem Fall die Schnittmengen der Listen benachbarter Kanten leer sind. Daher soll hier nur der Fall $0 < r < a$ betrachtet werden.

Bemerkung 5.3 Eine notwendige Bedingung für die (a, b, r) -Listenkantenfärbbarkeit ergibt sich aus folgender Überlegung: Mit Ausnahme der Graphen K_1 und K_2 besitzt jeder zusammenhängende Graph mindestens zwei benachbarte Kanten e_i und e_j . Ist e_i bereits mit b Farben aus der zugeordneten a -elementigen Liste gefärbt und haben die Listen $L(e_i)$ und $L(e_j)$ genau r gemeinsame Farben, so bleiben für e_j noch höchstens $a - (b - (a - r)) = 2a - b - r$ mögliche Farben, aus denen b Farben gewählt werden sollen. Somit muss immer $a \geq b + r/2$ gelten.

Das folgende Lemma ist hilfreich, um Aussagen über die (a, b, r) -Listenknotenfärbung oder -Listenkantenfärbung eines Graphen zu treffen. Dazu benötigt man noch die folgenden Definitionen:

Ist $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph, so wird mit $d_+(v)$ der *Ausgangsgrad* eines Knotens $v \in V$ bezeichnet, also die Anzahl von Bögen $a = vu \in A$; unter der *Ausgangsnachbarschaft* $N_+(v)$ eines Knotens $v \in V$ versteht man zudem die Knotenmenge $\{u : vu \in A\}$. Der *maximale Ausgangsgrad* eines Graphen G ist das Maximum der Ausgangsgrade $d_+(v)$ für alle Knoten $v \in V(G)$.

Die Aussage des Lemmas ist mindestens schon seit den achtziger Jahren bekannt; ein Beweis ist bei Alon und Tarsi [6] zu finden.

Lemma 5.22 *Es sei G ein Graph mit der Eigenschaft, dass für jeden Teilgraph H von G gilt: $|E(H)|/|V(H)| \leq k$. Dann besitzt G eine Orientierung mit maximalem Ausgangsgrad $\leq k$.*

Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich der erste allgemeine Satz zur (a, b, r) -Listenkantenfärbung beweisen.

Satz 5.23 *Jeder Graph G mit Maximalgrad Δ ist $((\Delta - 1)r + b, b, r)$ -listenkantenfärbbar für alle Zahlen $b, r \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Gilt $\Delta = 1$, so ist der Graph (b, b) -listenkantenfärbbar für jedes $b \in \mathbb{N}$ und damit auch (b, b, r) -listenkantenfärbbar. Es sei also $\Delta \geq 2$; dann gilt $0 < r < (\Delta - 1)r + b$ und die Bedingung aus Bemerkung 5.3 ist ebenfalls erfüllt.

Es sei H der Kantengraph zu G und H' ein beliebiger Teilgraph von H . Dann kann man durch Einfügen von Kanten in H' einen Graph H'' erhalten, der Kantengraph zu einem Teilgraph G' von G ist, und es gilt

$$|V(H')| = |E(G')| \quad \text{und} \quad |E(H')| \leq |E(H'')| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|V(G')|} (d(v_i))^2 - |E(G')|.$$

Also ist

$$\frac{|E(H')|}{|V(H')|} \leq \frac{\sum_{i=1}^{|V(G')|} (d(v_i))^2}{2|E(G')|} - 1 \leq \frac{\Delta \sum_{i=1}^{|V(G')|} d(v_i)}{2|E(G')|} - 1 = \Delta - 1.$$

Nach Lemma 5.22 besitzt H also eine Orientierung, deren maximaler Ausgangsgrad höchstens $\Delta - 1$ ist. Den Knoten von H seien nun beliebige $((\Delta - 1)r + b)$ -elementige Farblisten $L(v)$ zugeordnet. Streicht man für alle $v \in V(H)$ aus der zugeordneten Liste $L(v)$ alle Farben, die auch in einer der Listen $L(u_i)$, $i = 1, \dots, d_+(v)$ mit $u_i \in N_+(v)$ enthalten sind, so beinhaltet die entstehende neue Liste $L'(v)$ jeweils noch mindestens $(\Delta - 1)r + b - (\Delta - 1)r = b$ Farben. Da die Listen L' zweier benachbarter Knoten keine gemeinsamen Elemente besitzen, kann man H aus diesen Listen b -fach färben. Der Kantengraph H ist also $((\Delta - 1)r + b, b, r)$ -listenknotenfärbbar und G somit $((\Delta - 1)r + b, b, r)$ -listenkantenfärbbar. \square

Setzt man $b = r = m \in \mathbb{N}$, so ergibt sich direkt aus Satz 5.23 das folgende Korollar.

Korollar 5.5 *Jeder Graph G mit Maximalgrad Δ ist $(\Delta m, m, m)$ -listenkantenfärbbar für jedes $m \in \mathbb{N}$.*

Allgemeine Ergebnisse scheinen in der (a, b, r) -Listenknotenfärbung bisher nur für planare Graphen bekannt zu sein, und auch dort im Wesentlichen nur für den Fall

$b = 1$. Die Fragestellungen sind auch in der Kantenfärbung schwieriger einzugrenzen als bei der (a, b) -Färbung, da die Choice Edge Ratio $chr'(G)$ eines Graphen für die (a, b, r) -Färbung keine untere Schranke für a/b darstellt, wenn r klein genug gewählt ist.

Selbst für Kreise, für die die (a, b) -Listenkantenfärbbarkeit vollständig untersucht ist, scheint die Frage nach (a, b, r) -Listenkantenfärbungen schwierig zu beantworten zu sein. Nach Satz 5.16 ist ein ungerader Kreis C_{2k+1} nicht (a, b) -listenkantenfärbbar für $a/b < 2 + 1/k$; somit hat C_{2k+1} für keine ganze Zahl $x \geq 0$ eine $(2k - x, k, 2k - x)$ -Listenkantenfärbung. Nach Satz 5.23 ist aber jeder ungerade Kreis $(2k - x, k, k - x)$ -listenkantenfärbbar für jede Zahl x mit $0 \leq x < k$. Ob $k - x$ in diesem Fall jedoch der größtmögliche Wert für r ist, damit der ungerade Kreis C_{2k+1} eine $(2k - x, k, r)$ -Listenkantenfärbung besitzt, ist nicht bekannt.

Der folgende Satz gibt eine Eigenschaft aller Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 2$, also auch der ungeraden Kreise, bezüglich der (a, b, r) -Listenkantenfärbung an.

Satz 5.24 *Hat ein Graph G mit $\Delta(G) = 2$ eine (a, b, r) -Listenkantenfärbung, so ist G auch $(a + n, b, r + n)$ -listenkantenfärbbar für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei G zusammenhängend. Ist G ein Kreis, so seien die Kanten im Uhrzeigersinn mit e_1, \dots, e_q bezeichnet; ist G ein Weg, so werden die Kanten von G entlang des Weges mit e_1, \dots, e_q durchnummeriert. Jeder Kante von G sei eine Liste der Länge $a + n$ zugeordnet, so dass sich die Listen benachbarter Kanten um höchstens $r + n$ Farben überschneiden. Nun entfernt man, soweit vorhanden, aus jeder Liste $L(e_i)$ eine Farbe aus der Menge $L(e_i) \cap L(e_{i+1})$ für $i = 1, \dots, q - 1$ und aus $L(e_q)$ eine Farbe der Menge $L(e_q) \cap L(e_1)$. Damit erhalten die Listen alle mindestens $a + n - 1$ Farben und überschneiden sich bei benachbarten Kanten um höchstens $r + n - 1$ Farben. Wiederholt man diese Prozedur noch $(n - 1)$ -mal, erhält man Listen der Länge mindestens a , die sich in höchstens r Farben an benachbarten Kanten überschneiden, und kann den Graph nach Voraussetzung b -fach färben. \square

Schließlich soll in Satz 5.25 die (a, b, r) -Listenkantenfärbung von Bäumen untersucht werden. Nach Satz 5.19 besitzt jeder Baum mit Maximalgrad Δ eine $(\Delta m, m)$ -Listenkantenfärbung. Somit sind Bäume immer $(\Delta m, m, \Delta m)$ -listenkantenfärbbar für jedes $m \in \mathbb{N}$. Im folgenden Satz wird nun untersucht, für welche Werte r ein Baum mit Maximalgrad Δ eine (a, b, r) -Listenkantenfärbung besitzt, wenn $a < \Delta b$ ist.

Satz 5.25 *Jeder Baum T mit Maximalgrad $\Delta \geq 2$ besitzt für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \Delta m/2 - m + 1$ eine $(\Delta m - k, m, \Delta m - 2(k + m - 1))$ -Listenkantenfärbung.*

Beweis. Es sei T ein Baum mit Maximalgrad $\Delta \geq 2$ und $m, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \Delta m/2 - m + 1$. Jeder Kante e von T sei eine $(\Delta m - k)$ -elementige Liste $L(e)$ zugeordnet. Da T ein Baum ist, gibt es in $V(T)$ mindestens zwei Knoten vom Grad 1.

Es sei e_1 eine Kante aus $E(T)$, die zu einem solchen Knoten vom Grad 1 inzident ist. Zunächst wird e_1 mit einer beliebigen Menge von m Farben $\alpha_{1_1}, \dots, \alpha_{1_m}$ aus $L(e_1)$ gefärbt; die verwendeten Farben werden aus den Listen aller benachbarten Kanten gestrichen. Als nächstes färbt man nun von den zu e_1 benachbarten Kanten eine der Kanten, in deren aktuellen Listen am wenigsten Farben enthalten sind — in diesem Fall also eine Kante, aus deren ursprünglicher Liste möglichst viele der Farben von e_1 gestrichen wurden —, mit m Farben $\alpha_{2_1}, \dots, \alpha_{2_m}$ aus der verbleibenden Liste. Diese Kante wird e_2 genannt, und die verwendeten Farben werden wiederum aus den Listen aller ungefärbten zu e_1 benachbarten Kanten gestrichen. Diese Prozedur wird nun für alle noch nicht gefärbten Nachbarkanten von e_1 wiederholt, bis nach l Schritten l paarweise benachbarte Kanten gefärbt sind und es entweder keine weiteren ungefärbten Kanten gibt, die zu e_1 benachbart sind, oder aber eine zu e_1 benachbarte ungefärbte Kante existiert, in deren Liste keine m Farben mehr enthalten sind.

Angenommen, der zweite Fall tritt ein und e' sei die erste ungefärbte zu e_1 benachbarte Kante, in deren Liste sich weniger als m Farben befinden. Die Liste $L(e')$ enthielt vor der Färbung der letzten Kante e_l genau $m + x$ Farben für ein x mit $0 \leq x \leq m - 1$; von diesen wurden mindestens $x + 1$ Farben aus der Liste entfernt, weil sie für die Färbung von e_l verwendet wurden. Da immer die Kante mit den wenigsten Farben in der dazugehörigen Liste gefärbt wurde, enthielt auch $L(e_l)$ vor der Färbung von e_l höchstens $m + x$ Farben. Das heißt, in den $l - 1$ vorangegangenen Schritten wurden sowohl aus $L(e_l)$ als auch aus $L(e')$ mindestens $\Delta m - k - (m + x)$ Farben gestrichen; da insgesamt höchstens $(l - 1)m$ Farben entfernt wurden, müssen aus den beiden Listen mindestens

$$2(\Delta m - k - (m + x)) - (l - 1)m = 2\Delta m - 2k - 2x - (l + 1)m$$

gleiche Farben gestrichen worden sein. Zusammen mit den mindestens $x + 1$ Farben, die für die Färbung von e_l verwendet und aus der Liste von e' gestrichen wurden, hatten die Listen $L(e_l)$ und $L(e')$ also ursprünglich

$$|L(e_l) \cap L(e')| \geq 2\Delta m - 2k - x - (l + 1)m + 1$$

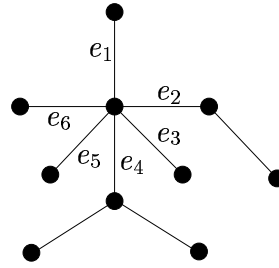
gemeinsame Farben; wegen $x \leq m - 1$ folgt

$$|L(e_l) \cap L(e')| \geq 2\Delta m - 2k - (l + 2)m + 2.$$

Da alle zu e_1 adjazenten Kanten zum gleichen Knoten inzident sind und nach Schritt l noch nicht alle diese Kanten gefärbt wurden, gilt $l < \Delta$, und somit ergibt sich $|L(e_l) \cap L(e')| > \Delta m - 2k - 2m + 2$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also konnten alle zu e_1 benachbarten Kanten gefärbt werden. Es seien nun mit f_1, \dots, f_n alle diejenigen zu e_1 benachbarten Kanten bezeichnet, die noch zu ungefärbten Kanten adjazent sind (siehe Abbildung 5.1).

Die oben beschriebene Färbungsprozedur wird nun für alle $i = 1, \dots, n$ durchgeführt, indem man als Startkante anstelle von e_1 die Kante f_i wählt. Da die

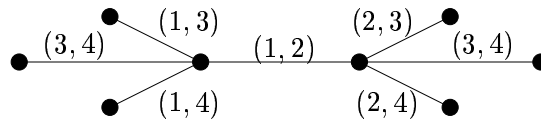

 Abbildung 5.1: Die Kanten $e_2 = f_1$ und $e_4 = f_2$ haben ungefärbte Nachbarkanten.

Färbungsprozedur mit einer beliebigen Menge von m Farben für die Kante e_1 startet, kann nun für die Startkante f_i die bereits ausgewählte Menge von m Farben übernommen werden. Die für f_i verwendeten Farben werden aus allen ungefärbten zu f_i benachbarten Kanten entfernt, und es können wieder alle zu f_i benachbarten Kanten aus ihren Listen gefärbt werden.

Durch sukzessives Anwenden der beschriebenen Prozedur auf alle Kanten, die noch zu ungefärbten Kanten benachbart sind, werden so alle Kanten von T aus ihren Listen gefärbt. \square

Bemerkung 5.4 Die Aussage von Satz 5.25 ist scharf in dem Sinne, dass sie für $k = 1$ und $m = 1$ nicht verbessert werden kann: Nach Satz 5.25 existiert zwar für jeden Baum mit Maximalgrad Δ eine $(\Delta - 1, 1, \Delta - 2)$ -Listenkantenfärbung, aber kein Graph G ist $(a, 1, a)$ -listenkantenfärbbar für $a < \Delta(G)$.

Auch für $k = 2$ lässt sich der Wert von r in der (a, b, r) -Listenkantenfärbung aus Satz 5.25 nicht allgemein verbessern: Der in Abbildung 5.2 dargestellte Graph hat Maximalgrad $\Delta = 4$ und ist nicht $(2, 1, 1)$ -listenkantenfärbbar, also nicht $(\Delta - k, 1, \Delta - 2k + 1)$ -listenkantenfärbbar für $k = 2$.


 Abbildung 5.2: G ist nicht $(\Delta - k, 1, \Delta - 2k + 1)$ -listenkantenfärbbar für $k = 2$.

Satz 5.25 kann erweitert werden auf alle Graphen $G = T + e$, wenn T ein Baum und e eine Kante $uv \in E(G)$ mit $u, v \in V(T)$ und $d_G(u) = 2$ oder $d_G(v) = 2$ ist:

Satz 5.26 Es sei G ein Graph mit Maximalgrad Δ , für den gilt: G enthält genau einen Kreis C , und es existiert ein Knoten $v \in V(C)$ mit $d_G(v) = 2$. Dann besitzt G eine $(\Delta m - k, m, \Delta m - 2(k + m - 1))$ -Listenkantenfärbung für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \Delta m / 2 - m + 1$ und jedes $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sind u und w die Nachbarknoten von v , so ist $G - uv$ ein Baum T . Es sei $T' = T + x + ux$ mit $x \notin V(G)$ ein neuer Baum, der aus T durch Zufügen eines neuen Knotens x und der Kante ux entsteht; dann gilt $\Delta(T') = \Delta(G)$. Den Kanten $e \in E(G)$ seien $(\Delta m - k)$ -elementige Listen $L(e)$ zugeordnet, die sich an benachbarten Kanten in höchstens $\Delta m - 2(k + m - 1)$ Farben überschneiden. Jeder Kante $e' \in E(T')$, die auch in $E(G)$ liegt, sei nun ebenfalls die Liste $L(e')$ zugeordnet; außerdem gelte $L(ux) = L(uv)$. Da uv und vw in G benachbart sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 |L(vw) \setminus L(ux)| &= \Delta m - k - |L(vw) \cap L(ux)| \\
 &= \Delta m - k - |L(vw) \cap L(uv)| \\
 &\geq \Delta m - k - (\Delta m - 2k - 2m + 2) \\
 &= k + 2m - 2
 \end{aligned}$$

und somit $|L(vw) \setminus L(ux)| \geq m$ wegen $k \geq 1$ und $m \geq 1$. Also lassen sich m Farben aus $L(vw)$ wählen, die nicht in $L(ux)$ liegen. Wählt man diese Farben für die Färbung von vw , so kann man wie im Beweis von Satz 5.25 verfahren, wobei man mit der Kante vw als Startkante e_1 der beschriebenen Färbungsprozedur beginnt. Auf diese Weise erhält man eine Färbung c' von T' . Für eine Färbung c von G kann man nun $c(e) = c'(e)$ für jede Kante $e \in G$ setzen, die auch in T' liegt, und schließlich die verbleibende Kante uv mit $c(uv) = c'(ux)$ färben. \square

5.2 Listentotalfärbung

Die Übertragung der Ideen der Listenfärbung auf Totalfärbungen ist in der Literatur zum ersten Mal 1997 in einem Artikel von Borodin, Kostochka und Woodall [19] zu finden. Listentotalfärbung von Graphen wird ganz analog zur in Abschnitt 5.1 beschriebenen Listenkantenfärbung definiert.

Definition 5.6 *Es sei $L = \{L(x) : x \in V(G) \cup E(G)\}$ eine Familie von Listen $L(x)$, die den Knoten und Kanten $x \in V(G) \cup E(G)$ eines Graphen G zugeordnet sind. Dann versteht man unter einer L -Listentotalfärbung eine Totalfärbung c von G , so dass $c(x) \in L(x)$ für jedes Element $x \in V(G) \cup E(G)$ gilt. Der Graph heißt k -listentotalfärbbar für ein $k \in \mathbb{N}$, wenn er für jede Familie L mit $|L(x)| \geq k$ eine L -Listentotalfärbung besitzt. Die kleinste Zahl k , für die der Graph k -listentotalfärbbar ist, heißt listentotalchromatische Zahl (in der Literatur manchmal auch als totale Choice-Zahl zu finden) und wird mit $\text{ch}''(G)$ bezeichnet.*

Über die listentotalchromatische Zahl allgemeiner Graphen G ist noch nicht viel bekannt. Grundlegende Eigenschaften sowie exakte Werte für $\text{ch}''(G)$ einiger Graphen G sollen in den beiden Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 dargestellt werden.

5.2.1 Eigenschaften der listentotalchromatischen Zahl

Wiederum entspricht eine L -Listentotalfärbung mit $L(x) = \{1, \dots, k\}$ für alle Elemente $x \in V(G) \cup E(G)$ offensichtlich einer herkömmlichen k -Totalfärbung eines Graphen G , woraus sich als untere Schranke für die listentotalchromatische Zahl $ch''(G) \geq \chi''(G)$ ergibt. Ebenso wie in der Listenkantenfärbung wird auch in der Listentotalfärbung vermutet, dass hier sogar für jeden Graph G die Gleichheit gilt.

Vermutung 5.4 (Listentotalchromatische Vermutung) *Jeder Graph G erfüllt*

$$ch''(G) = \chi''(G).$$

Diese Vermutung wurde bereits von Borodin, Kostochka und Woodall [19] aufgestellt. Ihre Richtigkeit würde gleichzeitig die Übertragung der totalchromatischen Vermutung 2.3 auf Listenfärbungen beweisen, die erstmals von Juvan, Mohar und Škrekovski [74] veröffentlicht wurde:

Vermutung 5.5 *Für jeden Graph G mit Maximalgrad Δ gilt*

$$ch''(G) \leq \Delta + 2.$$

Vermutung 5.5 konnte bereits für einige Graphenklassen bestätigt werden; so wurde sie zum Beispiel von Juvan, Mohar und Škrekovski [74] für alle Graphen mit Maximalgrad $\Delta \leq 3$ bewiesen.

Satz 5.27 *Ist G ein Graph mit Maximalgrad $\Delta(G) \leq 3$, so gilt*

$$ch''(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Mit Hilfe des listenchromatischen Index $ch'(G)$ eines Graphen G lässt sich die listentotalchromatische Zahl $ch''(G)$ nach oben begrenzen. Diese Beobachtung ist bereits bei Borodin, Kostochka und Woodall [19] zu finden.

Satz 5.28 *Für jeden Graph G gilt*

$$ch''(G) \leq ch'(G) + 2.$$

Mit Satz 5.28 lässt sich Vermutung 5.5 für alle diejenigen Klasse-1-Graphen beweisen, für die bereits die listenkantenchromatische Vermutung 5.1 bestätigt werden konnte. Dies sind zum Beispiel alle bipartiten Graphen (Satz 5.6 von Galvin).

Korollar 5.6 *Ist G ein bipartiter Graph, so gilt $ch''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Die mit den Sätzen 2.17 und 2.18 in Abschnitt 2.2 angegebenen allgemeinen oberen Schranken für die totalchromatische Zahl konnten bisher nicht auf die listentotalchromatische Zahl übertragen werden. So wird die Schranke $\lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor$ aus Satz 2.17 in Satz 5.29 von Borodin, Kostochka und Woodall [19] zum Beispiel nicht erreicht.

Satz 5.29 *Ist G ein Graph mit Maximalgrad Δ , so gilt*

$$\text{ch}''(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \right\rfloor + 2.$$

5.2.2 Exakte Werte für die listentotalchromatische Zahl

Es gibt nur wenige Graphenklassen, für die der Wert der totalchromatischen Zahl bereits exakt bestimmt ist. Die wichtigsten dieser Graphenklassen sollen hier dargestellt werden.

Graphen mit kleinem Maximalgrad

Die Bestimmung der totalchromatischen Zahl für Wege und Kreise stammt von Juvan, Mohar und Škrekovski [74]. Da dies die einzigen Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G) \leq 2$ sind, ergibt sich der folgende Satz:

Satz 5.30 *Ist G ein Graph mit Maximalgrad $\Delta \leq 2$, so gilt die listentotalchromatische Vermutung $\text{ch}''(G) = \chi''(G)$.*

Balancierte bipartite Graphen

Aus Korollar 5.6 folgt unmittelbar, dass Vermutung 5.4 für alle bipartiten Typ-2-Graphen gilt. Mit Satz 2.35 über die totalchromatische Zahl bipartiter Graphen erhält man den folgenden Satz.

Satz 5.31 *Ist G ein balancierter bipartiter Graph $K_{n,n}$, so gilt für seine listentotalchromatische Zahl $\text{ch}''(K_{n,n}) = \chi''(K_{n,n}) = n + 1$.*

Planare Graphen

Nach Satz 2.48 besitzen alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta(G) \geq 12$ eine Δ -Totalfärbung. Dieses Ergebnis konnte von Borodin, Kostochka und Woodall [19] auf Listentotalfärbung übertragen werden.

Satz 5.32 *Ist G ein planarer Graph mit Maximalgrad $\Delta \geq 12$, so gilt*

$$\text{ch}''(G) = \chi''(G) = \Delta.$$

Von den gleichen Autoren stammt ein Ergebnis, das analog zu Satz 2.49 zusätzlich zum Maximalgrad die Taillenweite des Graphen G berücksichtigt. Die Werte von Satz 2.49 werden hier jedoch nicht durchgängig erreicht.

Satz 5.33 *Ist G ein planarer Graph mit Maximalgrad Δ und Taillenweite g , so gilt*

$$\text{ch}''(G) = \Delta + 1 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \Delta \geq 16 & \text{und} & g \geq 3 \\ \Delta \geq 7 & \text{und} & g \geq 4 \\ \Delta \geq 6 & \text{und} & g \geq 5 \\ \Delta \geq 5 & \text{und} & g \geq 6 \\ \Delta \geq 4 & \text{und} & g \geq 10. \end{cases}$$

Schließlich konnte die listentotalchromatische Vermutung von Juvan und Mohar [73] für alle outerplanaren Graphen bewiesen werden.

Satz 5.34 *Ist G ein outerplanarer Graph, so gilt die listentotalchromatische Vermutung $\text{ch}''(G) = \chi''(G)$.*

Vergleicht man die Ergebnisse zum listenchromatischen Index und zur listentotalchromatischen Zahl, so wird deutlich, dass es in der Listentotalfärbung noch weniger Graphenklassen gibt, für deren Graphen G der exakte Wert von $\text{ch}''(G)$ bereits bekannt ist.

Im folgenden Kapitel 6 sind die Graphenklassen, für die der listenchromatische Index oder die listentotalchromatische Zahl bereits bestimmt sind, in Tabelle 6.5 zusammengefasst.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Die verschiedenen Formen der Kanten- und Totalfärbung von Graphen sind sehr aktuelle und, wie bereits in der Einleitung gezeigt, auch anwendungsrelevante Gebiete der Graphentheorie, die sich permanent weiterentwickeln. Dennoch gibt es eine Vielzahl offener Fragestellungen, und die großen Vermutungen zu diesen Themenbereichen sind noch immer weit davon entfernt, allgemein bewiesen oder widerlegt zu werden.

In der Kantenfärbung ist die Klassifizierung von Graphen nach Satz 2.3 von Vizing in die Klassen 1 und 2 eine Hauptaufgabe, die, wie in Abschnitt 2.1.2 ausgeführt, bisher nur für einzelne Graphenklassen gelöst ist. Die wichtigsten dieser Ergebnisse sind in Abschnitt 2.1.2 näher erläutert und in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Graphenklassen	Sätze
Kreise	2.4
Vollständige Graphen	2.5
r -reguläre Graphen, Ausnahme: brückenlose Graphen gerader Ordnung p mit $r < p - 5$	2.6, 2.8 und Bemerkung 2.3
Bipartite Graphen	2.10
Vollständig r -partite Graphen	2.11
Zirkulante Graphen	2.12
Planare 3-reguläre bzw. planare Graphen mit $\Delta \geq 7$ bzw. mit $\Delta = 6$ und Ordnung $p \leq 14$	Korollare 2.2 und 3.3; 2.14
Planare Graphen mit großem Maximalgrad und großer Taillenweite	2.15
Outerplanare Graphen	2.16

Tabelle 6.1: Graphen G mit bekannten $\chi'(G)$.

Im Zusammenhang mit der Kantenfärbung planarer Graphen ist neben der Vermutung 2.2, dass alle planaren Graphen mit Maximalgrad $\Delta = 6$ zur Klasse 1 gehören, vor allem die Weak Critical Graph Conjecture (Vermutung 3.1) von Interesse, die besagt, dass alle planaren kritischen Graphen ungerade Knotenzahl besitzen. Wie in Kapitel 3 erwähnt, ist diese Vermutung bisher für Graphen mit $p \leq 14$ Knoten bestätigt (Satz 3.2); im gleichen Kapitel werden alle planaren kritischen Graphen mit bis zu 12 Knoten konstruiert und dargestellt. Folgende noch weiterführende Vermutung stammt von Hoffman, Mitchem und Schmeichel [66].

Vermutung 6.1 *Ein planarer Graph G mit Maximalgrad Δ gehört genau dann zur Klasse 1, wenn er keinen Δ -überfüllten Teilgraph enthält.*

Da aus der Richtigkeit dieser Vermutung sowohl die Kantenfärbungsversion des Vierfärbensatzes (Satz 2.13) als auch eine Bestätigung der beiden oben genannten Vermutungen 2.2 und 3.1 folgen würde (siehe [66]), dürfte ein Beweis sehr schwierig sein. Vielleicht lässt sie sich jedoch in Zukunft für Graphen mit kleinem Maximalgrad bestätigen.

Die wichtigste Vermutung bezüglich der Totalfärbung ist die vieluntersuchte totalchromatische Vermutung 2.3, die besagt, dass jeder Graph G mit Maximalgrad Δ eine $(\Delta + 2)$ -Totalfärbung besitzt. In Abschnitt 2.2.2 wurden die wichtigsten Graphenklassen genannt, für die diese Vermutung bereits bewiesen ist, obwohl ihre totalchromatische Zahl bisher nicht allgemein bestimmt werden konnte. Diese sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst.

Graphenklassen	Sätze
Graphen mit $\Delta \leq 5$	2.20
Graphen der Ordnung p mit $\Delta \geq p - 5$	2.21
Bipartite Graphen	2.23
Vollständig r -partite Graphen	2.24
Planare Graphen mit $\Delta \neq 6$ oder mit Ordnung $p \leq 14$	2.25

Tabelle 6.2: Graphen G mit $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Es ist sicherlich eine interessante Aufgabe, die Richtigkeit der totalchromatischen Vermutung für weitere Graphenklassen oder -teilklassen zu beweisen. Zusätzlich wird man versuchen, für möglichst viele Graphen einen exakten Wert für die totalchromatische Zahl zu ermitteln. Tabelle 6.3 gibt eine Übersicht über die in Abschnitt 2.2.3 angegebenen wichtigsten Graphenklassen, für die dieser Wert bereits bestimmt ist.

Die totalchromatische Zahl zirkulanter Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G) = 3$ wird in Abschnitt 2.2.3 bestimmt. Neben diesen Graphen sind unter den zirkulanten Graphen noch weitere Graphenklassen, für die die totalchromatische Zahl

Graphenklassen	Sätze
Wege und Kreise	2.27 und 2.28
Vollständige Graphen	2.29
Graphen der Ordnung p mit $\Delta = p - 2$	2.31 und 2.32
$(p - 3)$ -reguläre Graphen	2.33 und 2.34
Vollständig r -partite Graphen, Ausnahme: nicht-balancierte r -partite Graphen gerader Ordnung mit $r \geq 5$	2.35, 2.38, 2.39 und 2.40
Zirkulante Graphen mit Maximalgrad 3	2.44
Planare Graphen mit $\Delta \geq 11$	2.48
Planare Graphen mit großem Maximalgrad und großer Taillenweite	2.49
Outerplanare Graphen	2.50

Tabelle 6.3: Graphen G mit bekanntem $\chi''(G)$.

bereits bekannt ist: Zirkulante Graphen mit Maximalgrad 2 sind isomorph zu Kreisen, während zirkulante Graphen der Ordnung p und mit Maximalgrad $p - 1$ gerade den vollständigen Graphen entsprechen. Aufgrund ihrer hohen Symmetrie bilden die zirkulanten Graphen eine Graphenklasse, für die es realistisch erscheint, weitere Teilergebnisse erzielen zu können. Dabei besteht jedoch eine Schwierigkeit darin, dass es bisher noch kein vernünftiges Isomorphiekriterium gibt: Mit Lemma 2.42 ist zwar eine hinreichende Bedingung angegeben, unter der zwei gegebene zirkulante Graphen isomorph — in diesem Fall auch *Ádám-isomorph* genannt — sind; jedoch ist diese Bedingung im Allgemeinen nicht notwendig. Ádám [1] vermutete 1967, dass die Bedingung für zirkulante Graphen auch notwendig ist; diese Vermutung wurde 1970 jedoch von Elspas und Turner [39] widerlegt, die zeigten, dass $C_{16}(1, 2, 7)$ und $C_{16}(2, 3, 5)$ isomorph, aber nicht Ádám-isomorph sind. Inzwischen sind weitere Gegenbeispiele zu Ádám's Vermutung bekannt. Bestimmte zirkulante Graphen sind jedoch tatsächlich genau dann isomorph, wenn sie Ádám-isomorph sind: Wie in einem Übersichtsartikel von Alspach und Sutcliffe [3] nachzulesen ist, gilt dies zum Beispiel für zirkulante Graphen G der Ordnung p , wenn p eine Primzahl oder das Produkt zweier Primzahlen ist, sowie für alle zirkulanten Graphen mit Maximalgrad 3. Boesch und Tindel [14] vermuten zudem, dass auch zirkulante Graphen G mit $\Delta(G) = 4$ genau dann isomorph sind, wenn sie Ádám-isomorph sind. Diese Vermutung ist bisher unbewiesen.

In Kapitel 4 werden zwei verallgemeinerte Färbungen neu eingeführt, nämlich die Kreiskanten- und Kreistotalfärbung. Die in dieser Arbeit untersuchten Graphenklassen, für die die Werte von $\chi'_c(G)$ beziehungsweise $\chi''_c(G)$ in den Abschnitten 4.1.2 und 4.2.2 ermittelt wurden, sind in Tabelle 6.4 zusammengefasst.

Kreiskantenfärbung	Kreistotalfärbung
Klasse-1-Graphen (Korollar 4.1)	Typ-1-Graphen (Satz 4.9)
Kreise (Satz 4.4)	Kreise (Satz 4.11)
Vollständige Graphen (Satz 4.5)	Vollständige Graphen (Satz 4.12)
Petersen-Graph (Satz 4.6)	Vollständig r -partite Graphen, Ausnahme: nicht-balancierte r -partite Graphen gerader Ordnung mit $r \geq 5$ (Satz 4.13)
Klasse-2-Graphen der Ordnung $p \leq 7$ (Abbildungen 4.4 bis 4.6)	Typ-2-Graphen der Ordnung $p \leq 7$ (Abbildungen 4.14 und 4.15)
Kantenfärbungskritische Graphen der Ordnung $p \geq 7$ mit Gradfolge $2^1 3^{p-1}$ (obere Schranke, Satz 4.7)	3-reguläre zirkulante Graphen (obere Schranke, Satz 4.14)

Tabelle 6.4: Graphen G mit bekanntem $\chi'_c(G)$ bzw. $\chi''_c(G)$ (letzte Zeile jeweils obere Schranke).

Möglicherweise lassen sich weitere Ergebnisse zur Kreiskanten- und Kreistotalfärbung spezieller Graphenklassen mit modifizierten Ansätzen erzielen. Besonders vielversprechend scheinen hier weiterhin die kritischen Graphen zu sein: Da man einen kritischen Graph (sowohl in der Kanten- als auch in der Totalfärbung) immer so färben kann, dass eine Farbe existiert, die nur an einem einzigen Element benötigt wird, liegt die Vermutung nahe, dass das Anwenden von Kreisfärbung ein besseres Ergebnis als die entsprechende Färbung liefert. Bezüglich Knotenfärbung hat sich diese Idee in gewisser Weise bestätigt: Nennt man einen Graph G kritisch in Bezug auf Knotenfärbung, wenn für jeden Knoten $v \in V(G)$ die Ungleichung $\chi(G - v) < \chi(G)$ gilt, so zeigte Guichard [50], dass jeder kritische Graph G der Knotenfärbung mit Taillenweite $g \geq \chi(G) + 1$ eine (k, d) -Kreisknotenfärbung mit $k/d < \chi(G)$ besitzt. Für die in den Abschnitten 4.1.3 und 4.2.3 betrachteten kritischen Graphen mit bis zu 7 Knoten gilt ebenfalls $\chi'_c(G) < \chi'(G)$ für alle kantenfärbungskritischen Graphen G mit Taillenweite $g \geq \chi'(G) + 1$ und analog $\chi''_c(G) < \chi''(G)$ für alle totalfärbungskritischen Graphen G mit $g(G) \geq \chi''(G) + 1$. Da die Taillenweite dieser Graphen jedoch nur im Fall der ungeraden Kreise größer als der chromatische Index beziehungsweise die totalchromatische Zahl ist, lassen sich hieraus noch keine allgemeinen Schlüsse ziehen.

Die Listenfärbung, vor allem die Listentotalfärbung von Graphen, ist noch ein verhältnismäßig junges Thema der Färbungstheorie von Graphen; daher sind in diesem Gebiet noch viele Fragen offen. Die beiden großen Vermutungen der Listenkanten- und Listentotalfärbung — die listenkantenchromatische Vermutung 5.1 und die listentotalchromatische Vermutung 5.4 — sind bisher nur für wenige Graphenklassen bestätigt worden; die in den Abschnitten 5.1.2 und 5.2.2 aufgeführten

Graphen G , für die die exakten Werte für $\text{ch}'(G)$ beziehungsweise $\text{ch}''(G)$ schon bekannt sind, werden in Tabelle 6.5 zusammengefasst.

Listenkantenfärbung	Listentotalfärbung
Wege und Kreise (trivial)	Wege und Kreise (Satz 5.30)
Bipartite Graphen (Satz 5.6)	Balancierte bipartite Graphen (Satz 5.31)
Planare Graphen mit $\Delta \geq 12$ (Satz 5.7)	Planare Graphen mit $\Delta \geq 12$ (Satz 5.32)
Planare Graphen mit großem Maximalgrad und großer Tailenweite (Satz 5.8)	Planare Graphen mit großem Maximalgrad und großer Tailenweite (Satz 5.33)
Outerplanare Graphen (Korollar 5.2)	Outerplanare Graphen (Satz 5.34)
Planare reguläre Klasse-1-Graphen (Satz 5.13)	
Klasse-2-Graphen mit $\Delta = 3$ (Korollar 5.1)	
Vollständige Graphen ungerader Ordnung (Satz 5.5)	

Tabelle 6.5: Graphen G mit bekanntem $\text{ch}'(G)$ bzw. $\text{ch}''(G)$.

Vielsprechend für weitere Ergebnisse zur Listenfärbung sind zum Beispiel die zirkulanten Graphen mit Maximalgrad 3, deren chromatischer Index und totalchromatische Zahl in Kapitel 2 angegeben sind beziehungsweise dort bestimmt wurden. Nach Satz 2.43 sind unter den zirkulanten Graphen $C_{2n}(a, n)$ mit $\text{ggT}(a, n) = l$ und $n = ml, a = kl$ zwei Fälle zu unterscheiden: Ist k ungerade, so ist der Graph isomorph zu $C_{2n}(1, n)$; für gerade k ist er isomorph zu $C_{2n}(2, n)$. Da $C_{2n}(2, n)$ ein planarer regulärer Klasse-1-Graph ist, ist die listenkantenchromatische Vermutung mit Satz 5.13 in diesem Fall schon bewiesen; somit gilt $\text{ch}'(C_{2ml}(kl, ml)) = 3$ für gerade k . Ist k ungerade und m ebenfalls ungerade, so ist der Graph $C_{2ml}(kl, ml)$ bipartit und hat daher nach Satz 5.6 ebenfalls listenchromatischen Index 3. Es müssen also nur noch Graphen untersucht werden, für die k ungerade und m gerade ist; hier scheint ein induktiver Ansatz vielversprechend. Erste Versuche in dieser Richtung blieben jedoch bisher erfolglos.

Die Konzepte der speziellen Listenfärbung, die in den Abschnitten 5.1.3 und 5.1.4 von Knoten- auf Kantenfärbung übertragen wurden, lassen sich in ähnlicher Weise auch in der Totalfärbung anwenden. So kann man die (a, b) -Totalfärbung eines Graphen G definieren als Listentotalfärbung von G , bei der für die Elemente von G jeweils b -elementige Teilmengen der ihnen zugeordneten a -elementigen Listen

so ausgewählt werden müssen, dass die Mengen benachbarter Elemente sich paarweise nicht überschneiden. Definiert man die *Choice Total Ratio* $ch''(G)$ als Infimum über alle Brüche a/b , so dass ein Graph G eine (a, b) -Listentotalfärbung besitzt, so lassen sich die meisten in Abschnitt 5.1.3 ermittelten Eigenschaften der Choice Edge Ratio übertragen. Die Bestimmung der Choice Total Ratio für Typ-2-Graphen G ist bisher jedoch noch nicht gelungen; selbst für Kreise C_p mit $p \equiv 1$ oder 2 (modulo 3), die nach dem Graph K_2 die Typ-2-Graphen mit kleinstem Maximalgrad darstellen, konnte die Choice Total Ratio bisher nicht bestimmt werden. Diese Aufgabe entspräche der Bestimmung der Choice Ratio für zirkulante Graphen $C_p(1, 2)$ und ist somit nicht analog der (a, b) -Listenkantenfärbung ungerader Kreise zu lösen.

Neben der (a, b) - und der (a, b, r) -Listenfärbung gibt es noch weitere Spezialformen der Listenknotenfärbung, deren Übertragung auf Kanten- und Totalfärbung bisher nicht untersucht wurde. Als Beispiele seien hier die *partielle Listenfärbung* und die *Fortführbarkeit von Vorfärbungen* genannt.

Es sei G ein Graph mit listenchromatischer Zahl $ch(G)$. Für eine *partielle Listenfärbung* von G wird den Knoten von G eine Familie L_t von Listen der Länge $t \leq ch(G)$ zugeordnet. Da eine vollständige Knotenfärbung aus den zugeordneten Listen für $t < ch(G)$ nicht möglich ist, wird nun nach der maximalen Anzahl von Knoten gefragt, die aus diesen Listen knotengefärbt werden können. Dazu definiert man den Färbungsparameter $\lambda_t(G)$, der über alle Familien L_t von Listen der Länge t die maximale Anzahl von Knoten $v \in V(G)$, die aus L_t färbbar sind, minimiert.

Albertson, Grossman und Haas [2] stellten die Vermutung auf, dass $\lambda_t(G) \geq |V(G)| \cdot t / ch(G)$ gilt. Mit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie konnte Chapel [26] zeigen, dass sich immer mehr als $6/7$ der vermuteten Anzahl von Knoten färben lassen. Der Beweis scheint sich analog auf die entsprechende Fragestellung bezüglich Listenkantenfärbung übertragen zu lassen.

Bei der *Fortführbarkeit von Listenvorfärbungen* eines Graphen G ist eine Teilmenge V' der Knotenmenge $V(G)$ bereits mit Farben aus den k -elementigen Listen, die den Knoten zugeordnet sind, vorgefärbt. Es wird gefragt, ob der Graph aus den Listen so listenknotenfärbbar ist, dass jeder Knoten aus V' die bereits vorgewählte Farbe erhält.

Voigt [103] untersuchte die Fortführbarkeit von Listenvorfärbungen in dem Fall, dass $|V'| = 1$ gilt. Ein Graph G wird *frei- k -listenknotenfärbbar* genannt, wenn jede Vorfärbung eines beliebigen Knotens v aus der zugeordneten k -elementigen Liste $L(v)$ zu einer k -Listenknotenfärbung fortgeführt werden kann. In [103] wird gezeigt, dass ein zusammenhängender Graph G genau dann frei-2-listenknotenfärbbar ist, wenn er ein Baum ist. Zudem wird bewiesen, dass jeder planare Graph genau dann 5-listenknotenfärbbar ist, wenn er frei-5-listenknotenfärbbar ist; da Thomassens Beweis der 5-Listenknotenfärbbarkeit aller planaren Graphen (Satz 5.3) jedoch ebenfalls Vorfärbungen benutzt, wird dieses Ergebnis hierfür nicht mehr benötigt. Die in [103] verwendeten Ideen könnten jedoch auch für Untersuchungen weiterer Graphenklassen anwendbar sein.

Die Übertragung partieller Listenfärbung sowie der Fortführbarkeit von Listenvorfärbungen, aber auch anderer Konzepte der Listenfärbungen mit lokalen Bedingungen auf Kanten- und Totalfärbung liefert sicherlich weitere interessante Aspekte der Graphenfärbung.

Die großen Vermutungen der Kanten- und Totalfärbung sowie der Listenkanten- und Listentotalfärbung können in absehbarer Zeit mit den bisherigen Methoden voraussichtlich nicht allgemein bewiesen oder widerlegt werden. Jedoch gelingt es mitunter, durch unterschiedliche Ansätze für einzelne spezielle Graphenklassen zumindest eine der Vermutungen zu bestätigen, was in dieser Arbeit demonstriert wurde. Dies wird auch in Zukunft sicherlich eine Hauptaufgabe der Graphenfärbung bleiben. Darüber hinaus ergeben sich mit den Definitionen der Kreisfärbung, der (a, b) - und (a, b, r) -Listenfärbung und anderer Spezialformen der Färbung neue Ansätze, deren Betrachtung vielleicht auch Licht auf Fragestellungen der klassischen Graphenfärbung werfen wird.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Ádám, *Research problem 2–10*. J. Combin. Theory 3 (1967), 393.
- [2] M. O. Albertson, S. Grossman und R. Haas, *Partial list colorings*. Discrete Math. 214 (2000), 235–240.
- [3] B. Alspach und R. J. Sutcliffe, *Vertex-transitive graphs of order 2*. Ann. N. Y. Acad. Sci. 319 (1979), 18–27.
- [4] K. Appel und W. Haken, *Every planar map is four-colorable. Part I: Discharging*. Illinois J. Math. 21 (1977), 429–490.
- [5] K. Appel, W. Haken und J. Koch, *Every planar map is four-colorable. Part II: Reducibility*. Illinois J. Math. 21 (1977), 491–567.
- [6] N. Alon und M. Tarsi, *Colorings and orientations of graphs*. Combinatorica 12 (1992), 125–134.
- [7] N. Alon, Zs. Tuza und M. Voigt, *Choosability and fractional chromatic numbers*. Discrete Math. 165/166 (1997), 31–38.
- [8] M. Behzad, *Graphs and their Chromatic Numbers*. Doct. thesis, Michigan State University (1965).
- [9] M. Behzad und G. Chartrand, *Introduction to the Theory of Graphs*. Allyn and Bacon Inc., Boston (1971).
- [10] M. Behzad, G. Chartrand und J. K. Cooper Jr., *The colour numbers of complete graphs*. J. London Math. Soc. 42 (1967), 226–228.
- [11] L. W. Beineke und R. J. Wilson, *On the edge-chromatic number of a graph*. Discrete Math. 5 (1973), 15–20.
- [12] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam (1973).
- [13] J. C. Bermond, *Nombre chromatique total du graphe r -parti complet*. J. London Math. Soc. 9 (1974/75), 279–285.
- [14] F. Boesch und R. Tindell, *Circulants and their connectivities*. J. Graph Theory 8 (1984), 487–499.

- [15] D. Bokal und G. Brinkmann, *Chromatic index critical graphs of order 14*. Kolloquium über Kombinatorik, Technische Universität Braunschweig (17.–18. November 2000).
- [16] B. Bollobás und H. R. Hind, *List-colourings of graphs*. Graphs and Combinatorics 1 (1985), 115–127.
- [17] J. A. Bondy und P. Hell, *A note on the star chromatic number*. J. Graph Theory 14 (1990), 479–482.
- [18] O. V. Borodin, *On the total colouring of planar graphs*. J. Reine Angew. Math. 394 (1989), 180–185.
- [19] O. V. Borodin, A. V. Kostochka und D. R. Woodall, *List edge and list total colourings of multigraphs*. J. Combin. Theory Ser. B 71 (1997), 184–204.
- [20] O. V. Borodin, A. V. Kostochka und D. R. Woodall, *Total colorings of planar graphs with large maximum degree*. J. Graph Theory 26 (1997), 53–59.
- [21] O. V. Borodin, A. V. Kostochka und D. R. Woodall, *Total colourings of planar graphs with large girth*. Europ. J. Combinatorics 19 (1998), 19–24.
- [22] G. Brinkmann und E. Steffen, *Snarks and reducibility*. Ars Combin. 50 (1998), 292–296.
- [23] G. Brinkmann und E. Steffen, *Chromatic-index-critical graphs of orders 11 and 12*. European J. Combin. 19 (1998), 889–900.
- [24] I. Broere, *Every connected circulant is hamiltonian*. Verslagreeks van die Departement Wiskunde, RAU, no. 2/86, Manuskript (1986).
- [25] A. Cavicchioli, M. Meschiari, B. Ruini und F. Spaggiari, *A survey on snarks and new results: products, reducibility and a computer search*. J. Graph Theory 28 (1998), 57–86.
- [26] G. G. Chappel, *A lower bound for partial list colorings*. J. Graph Theory 32 (1999), 390–393.
- [27] G. Chartrand und O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*. International Series in Pure and Applied Mathematics, Mc Graw-Hill, Inc., New York (1993).
- [28] B. L. Chen, L. Dong, Q. Z. Liu und K. C. Huang, *Total colorings of equibipartite graphs*. Discrete Math. 194 (1999), 59–65.
- [29] B. L. Chen und H. L. Fu, *Total colourings of graphs of order $2n$ having maximum degree $2n - 2$* . Graphs and Combinatorics 8 (1992), 119–123.
- [30] A. G. Chetwynd und A. J. W. Hilton, *Regular graphs of high degree are 1-factorizable*. Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 193–206.

- [31] A. G. Chetwynd und H. P. Yap, *Chromatic index critical graphs of order 9*. Discrete Math. 47 (1983), 23–33.
- [32] K. H. Chew, *Total chromatic number of graphs of high maximum degree*. J. Combin. Math. and Combin. Computing 18 (1995), 245–254.
- [33] K. H. Chew und H. P. Yap, *Total chromatic number of complete r -partite graphs*. J. Graph Theory 16 (1992), 629–634.
- [34] G. J. Davis und G. S. Domke, *3-circulant graphs*. J. Combin. Math. and Combin. Computing 40 (2002), 133–142.
- [35] G. Demoucron, Y. Malgrange und R. Pertuiset, *Graphes planaires: reconnaissance et construction de représentation planaires topologiques*. Rev. Française Recherche Opérationnelle 8 (1964), 33–47.
- [36] L. Dong und H. P. Yap, *The total chromatic number of unbalanced complete r -partite graphs of even order*. Bulletin of the ICA 28 (2000), 107–117.
- [37] J. K. Dugdale und A. J. W. Hilton, *The total chromatic number of regular graphs of order $2n$ and degree $2n - 3$* . J. Combin. Inform. System Sci. 15 (1990), 103–110.
- [38] M. N. Ellingham und L. Goddyn, *List edge colourings of some 1-factorable multigraphs*. Combinatorica 16 (1996), 343–352.
- [39] B. Elspas und J. Turner, *Graphs with circulant adjacency matrices*. J. Combin. Theory 9 (1970), 297–307.
- [40] P. Erdős, A. L. Rubin und H. Taylor, *Choosability in graphs*. Congress. Numer. 26 (1979), 125–157.
- [41] P. Erdős und R. J. Wilson, *On the chromatic index of almost all graphs*. J. Combin. Theory Ser. B 23 (1977), 255–257.
- [42] S. Fiorini, *The Chromatic Index of Simple Graphs*. Doctoral Thesis, The Open University, England (1974).
- [43] S. Fiorini, *On the chromatic index of outerplanar graph*. J. Combin. Theory Ser. B 18 (1975), 35–38.
- [44] S. Fiorini und R. J. Wilson, *Edge-Colourings of Graphs*. Research Notes in Mathematics 16, Pitman Publishing, London (1977).
- [45] J. Fouquet, *Note sur la non existence d'un snark ayant exactement 16 sommets*. C. N. R. S., Paris (1979).
- [46] M. Gardner, *Mathematical games*. Scientific American 234 (1976), 126–130 und no. 9, 210–211.

- [47] F. Galvin, *The list chromatic index of a bipartite multigraph*. J. Combin. Theory Ser. B 63 (1995), 153–158.
- [48] M. K. Goldberg, *Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3*. J. Combin. Theory Ser. B 31 (1981), 282–291.
- [49] M. Gottschalk, *Totale und listentotale Färbungen von Graphen*. Diplomarbeit, Technische Universität Braunschweig (1999).
- [50] D. R. Guichard, *Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number*. J. Graph Theory 17 (1993), 129–134.
- [51] S. Gutner, *Choice Numbers of Graphs*. M. Sc. Thesis, Tel Aviv University (1992).
- [52] A. Hackmann, *Kantenfärbungen planarer Graphen*. Diplomarbeit, Technische Universität Braunschweig (1998).
- [53] A. Hackmann, *Critically edge-colourable planar graphs of order $p \leq 12$* . Congress. Numer. 149 (2001), 19–32.
- [54] A. Hackmann und A. Kemnitz, *List edge colorings of outerplanar graphs*. Ars Combin. 60 (2001), 181–185.
- [55] A. Hackmann und A. Kemnitz, *The circular chromatic index*. Discrete Math. (erscheint).
- [56] A. Hackmann und A. Kemnitz, *Circular total colorings of graphs*. Congress. Numer. (erscheint).
- [57] R. Häggkvist und A. G. Chetwynd, *Some upper bounds on the total and list chromatic numbers of multigraphs*. J. Graph Theory 16 (1992), 503–516.
- [58] R. Häggkvist und J. C. M. Janssen, *New bounds on the list-chromatic index of the complete graph and other simple graphs*. Research Report 19, Department of Mathematics, University of Umeå (1993).
- [59] G. M. Hamilton und A. J. W. Hilton, *Graphs of maximum degree 3 and order at most 16 which are critical with respect to the total chromatic number*. J. Combin. Math. and Combin. Computing 10 (1991), 129–149.
- [60] G. M. Hamilton, A. J. W. Hilton und H. R. F. Hind, *Graphs of order at most 10 which are critical with respect to the total chromatic number*. J. Combin. Math. and Combin. Computing 24 (1997), 97–113.
- [61] J. Hattingh, *The edge-chromatic number of a circulant*. Quaestiones Mathematicae 11 (1988), 371–381.
- [62] P. J. Heawood, *Map-colour theorem*. Quart. J. Pure Appl. Math. (Oxford) 24 (1890), 332–338.

- [63] A. J. W. Hilton, *A total-chromatic number analogue of Plantholt's theorem*. Discrete Math. 79 (1989/90), 169–175.
- [64] A. J. W. Hilton und H. R. Hind, *Total chromatic number of graphs having large maximum degree*. Discrete Math. 117 (1993), 127–140.
- [65] H. R. Hind, *An upper bound for the total chromatic number of dense graphs*. J. Graph Theory 16 (1992), 197–203.
- [66] T. Hoffman, J. Mitchem und E. Schmeichel, *On edge-coloring graphs*. Ars Combin. 33 (1992), 11–128.
- [67] D. G. Hoffman und C. A. Rodger, *The chromatic index of complete multipartite graphs*. J. Graph Theory 16 (1992), 159–164.
- [68] R. Isaacs, *Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not Tait colorable*. Amer. Mathematics Monthly 82 (1975), 221–239.
- [69] I. T. Jakobsen, *Some remarks on the chromatic index of a graph*. Arch. Math. (Basel) 24 (1973), 440–448.
- [70] J. C. M. Janssen, *The Dinitz problem solved for rectangles*. Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993), 243–249.
- [71] T. R. Jensen und B. Toft, *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience, New York (1995).
- [72] P. D. Johnson Jr., *About two definitions of the fractional chromatic number*. Geombinatorics 5 (1996), 99–108.
- [73] M. Juvan und B. Mohar, *List colorings of outerplanar graphs*. Manuskript (1998).
- [74] M. Juvan, B. Mohar und R. Škrekovski, *List total colourings of graphs*. Combinatorics, Probability and Computing 7 (1998), 181–188.
- [75] M. Juvan, B. Mohar und R. Škrekovski, *Graphs of degree 4 are 5-edge-choosable*. J. Graph Theory 32 (1999), 250–264.
- [76] A. B. Kempe, *On the geographical problem of four colours*. Amer. J. Math. 2 (1879), 193–200.
- [77] D. Koenig, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*. Math. Ann. 77 (1916), 453–465.
- [78] A. V. Kostochka, *The total coloring of a multigraph with maximal degree 4*. Discrete Math. 17 (1977), 161–163.
- [79] A. V. Kostochka, *Upper Bounds of Chromatic Functions on Graphs (russisch)*. Doctoral Thesis, Novosibirsk (1978).

- [80] A. V. Kostochka, *Exact upper bound of total chromatic number of multigraphs (russisch)*. In: Proc. 24. Int. Sci. Colloquium of Tech. Univ. of Ilmenau (1979), 33–36.
- [81] A. V. Kostochka, *The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven*. Discrete Math. 162 (1996), 199–214.
- [82] A. V. Kostochka, *List edge chromatic number of graphs with large girth*. Discrete Math. 159 (1996), 103–109.
- [83] J. Kratochvil, Zs. Tuza und M. Voigt, *New trends in the theory of graph colorings: choosability and list coloring*. DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 49; Contemporary trends in discrete mathematics (Stirin Castle, 1997), 183–197.
- [84] K.-W. Lih, D. D.-F. Liu und X. Zhu, *Star extremal circulant graphs*. SIAM J. Discrete Math. 12 (1999), 491–499.
- [85] M. Molloy und B. Reed, *Asymptotically better list colourings*. Manuskript (1997).
- [86] D. Moser, *The star chromatic number of line graphs*. In: Y. Alavi und A. Schwenk (eds): *Graph theory, Combinatorics and Algorithms*. Proc. Seventh Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs, 1992. Wiley, New York (1995), pp. 819–823.
- [87] M. Plantholt, *The chromatic index of graphs with a spanning star*. J. Graph Theory 5 (1981), 45–53.
- [88] M. Preissmann, *Snarks of order 18*. Discrete Math. 42 (1982), 125–126.
- [89] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour und R. Thomas, *The 4-colour theorem*. J. Combin. Theory Ser. B 70 (1997), 2–42.
- [90] M. Rosenfeld, *On the total coloring of certain graphs*. Israel J. Math. 9 (1971), 396–402.
- [91] D. P. Sanders (private Mitteilung).
- [92] D. P. Sanders und Y. Zhao, *On total 9-coloring planar graphs of maximum degree seven*. J. Graph Theory 31 (1999), 67–73.
- [93] P. G. Tait, *Remarks on the colouring of maps*. Proceeding of the Royal Society Edinburgh 10 (1880), 501–503, 729.
- [94] C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*. J. Combin. Theory Ser. B 62 (1994), 180–181.
- [95] Zs. Tuza, *Graph colorings with local constraints – A survey*. Discuss. Math. Graph Theory 17 (1997), 161–228.

LITERATURVERZEICHNIS

- [96] Zs. Tuza und M. Voigt, *Every 2-choosable graph is $(2m, m)$ -choosable*. J. Graph Theory 22 (1996), 245–252.
- [97] N. Vijayaditya, *On total chromatic number of a graph*. J. London Math. Soc. 3 (1971), 405–408.
- [98] A. Vince, *Star chromatic number*. J. Graph Theory 12 (1988), 551–559.
- [99] V.G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a p -graph (russisch)*. Diskret. Analiz 3 (1964), 25–30.
- [100] V.G. Vizing, *The chromatic class of a multigraph (russisch)*. Kibernetika (Kiev) 3 (1965) 29–39 / Cybernetics 3 (1965) 32–41.
- [101] V.G. Vizing, *Critical graphs with a given chromatic class (russisch)*. Diskret. Analiz 5 (1965), 9–17.
- [102] V.G. Vizing, *Vertex colorings with given colors (russisch)*. Diskret. Analiz 29 (1976), 3–10.
- [103] M. Voigt, *Choosability of planar graphs*. Discrete Math. 150 (1996), 457–460.
- [104] M. Voigt, *On List Colourings and Choosability of Graphs*. Habilitationsschrift, Technische Universität Ilmenau (1998).
- [105] P. Wellmann, *Die sternchromatische Zahl*. Diplomarbeit, Technische Universität Braunschweig (2001).
- [106] B. Xu, *A sufficient condition for bipartite graphs to be type one*. J. Graph Theory 29 (1998), 133–137.
- [107] H.P. Yap, *Total colourings of graphs*. Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 159–163.
- [108] H.P. Yap, *Total chromatic number of graphs G having maximum degree $|G| - 3$* . In: *Combinatorics and Graph Theory*. Proceeding of the Spring School and the International Conference on Combinatorics, Hefei, 1992, World Scientific, Singapore (1993), 192–207.
- [109] H.P. Yap, *Total Colourings of Graphs*. Lecture Notes in Mathematics 1623, Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [110] H.P. Yap und K. H. Chew, *Total chromatic number of graphs of high degree. II*, J. Australian Math. Soc. A 53 (1992), 219–228.
- [111] H.P. Yap, K.H. Chen und H.L. Fu, *Total chromatic number of graphs of order $2n + 1$ having maximum degree $2n - 1$* . J. London Math. Soc. 52 (1995), 434–446.

- [112] Z. Zhang, J. Zhang und J. Wang, *The total chromatic number of some graphs*. Scientia Sinica A 31 (1988), 1434–1441.
- [113] X. Zhu, *Star chromatic numbers and products of graphs*. J. Graph Theory 16 (1992), 557–569.
- [114] X. Zhu, *Circular chromatic number: a survey*. Discrete Math. 229 (2001), 371–410.

Index

$\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$:	Boden- und Dachfunktion von x	12
$a_1^{c_1}, \dots, a_k^{c_k}$:	Knotengradfolge	42
$\alpha(G)$:	Unabhängigkeitszahl von G	22
$\alpha'(G)$:	Kantenunabhängigkeitszahl von G	12
$\alpha''(G)$:	totale Unabhängigkeitszahl von G	21
$\text{ch}(G)$:	listenchromatische Zahl von G	87
$\text{ch}'(G)$:	listenchromatischer Index von G	88
$\text{ch}''(G)$:	listentotalchromatische Zahl von G	107
$\text{chr}(G)$:	Choice Ratio von G	95
$\text{chr}'(G)$:	Choice Edge Ratio von G	95
$C_p(a_1, \dots, a_r)$:	zirkulanter Graph	16
$d_+(v)$:	Ausgangsgrad von v	102
\overline{G} :	Komplement von G	26
$g(G)$:	Tailenweite von G	18
$G + H$:	Summe von G und H	39
$\text{ggT}(n_1, \dots, n_k)$:	größter gemeinsamer Teiler von n_1, \dots, n_k	17
$K_{m,n}$:	vollständig bipartiter Graph	15
K_{n_1, \dots, n_r} :	vollständig r -partiter Graph	15
$K(r, n)$:	balancierter vollständig r -partiter Graph	16
$L(G)$:	Kantengraph von G	11
$\lambda_t(G)$:	Parameter der partiellen Listenfärbung von G	116
$N_+(v)$:	Ausgangsnachbarschaft von v	102
$T(G)$:	Totalgraph von G	21
$\chi(G)$:	chromatische Zahl von G	10
$\chi'(G)$:	chromatischer Index von G	11
$\chi''(G)$:	totalchromatische Zahl von G	21
$\chi_c(G)$:	kreischromatische Zahl von G	63
$\chi'_c(G)$:	kreischromatischer Index von G	64
$\chi''_c(G)$:	kreistotalchromatische Zahl von G	75